Opus 08. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques. Corrigé

1) a) On a $P_n(x) = xQ_{n-1}(x) - (-1)^{n-1}(-a_0)(-1)^{n-1} = xQ_{n-1}(x) + a_0$.

Par hypothèse de récurrence, $Q_{n-1}(x) = x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{k-1}$, d'où $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

c) En retranchant, pour $i = 2, 3, ..., n$, à la i-ième ligne la précédente multipliée par $\frac{1}{x}$, on obtient

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & a_1 + a_0 x^{-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & x & a_{n-2} + a_{n-3}x^{-1} + ... + a_0 x^{-(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x + a_{n-1} + a_{n-2}x^{-1} + a_{n-3}x^{-2} + ... + a_0 x^{-n} \end{vmatrix}$$

Donc $\forall x \neq 0$, $P_n(x) = x^{n-1}(x + a_{n-1} + a_{n-2}x^{-1} + a_{n-3}x^{-2} + ... + a_0 x^{-n}) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

Deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{C}^*$ sont égaux, donc $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.

2) a) La sous-matrice de $A - \lambda I_n$obtenue en supprimant la première ligne et la dernière colonne est inversible (triangulaire supérieure). Donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geq n - 1$. Donc $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \leq 1$.

b) Si P_n est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable (et admet n droites propres).

Réciproquement, supposons que A est diagonalisable.

Ainsi $\mathbb{C}^n$ est somme des sev propres de A. Par a), on en déduit que A admet n droites propres.

Donc P_n est scindé à racines simples.

3) a) Supposons par l'absurde qu'il existe X non nul tel que $AX = 0$.

Posons $|x_p| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$. Comme X n'est pas nul, alors $|x_p| > 0$.

En considérant la p-ième équation de $AX = 0$, on a $a_{pp}x_p = \sum_{j \neq p} a_{pj}x_j$.

Donc $|a_{pp}| \leq \sum_{j \neq p} |a_{pj}| \dfrac{|x_j|}{|x_p|} \leq \sum_{j \neq p} |a_{pj}|$. Ce qui contredit $|a_{pp}| > \sum_{j \neq p} |a_{pj}|$.

Donc $X \longmapsto AX$ est injectif. Donc par dimension, A est inversible.

b) Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\lambda \,\mathrm{Id} - A$ n'est pas inversible, donc n'est pas à diagonale dominante.

Donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

c) On considère la matrice compagnon A dont le polynôme caractéristique est P_n.

On a donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Par b), $|\lambda| \leq a_0$ ou $|\lambda| \leq 1 + |a_1|$ ou ... ou $|\lambda| \leq 1 + |a_{n-2}|$ ou $|\lambda - a_{n-1}| \leq 1$.

On en déduit que dans tous les cas, on a bien : $|\lambda| \leq 1 + \max_{0 \leq k < n} |a_k|$.

4) a) Supposons (i).

La matrice de u dans la base $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une matrice compagnon.

Supposons que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est une matrice compagnon, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Alors $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $e_{j+1} = u(e_j)$. Donc $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), ..., u^{n-1}(e_1))$.

b) *Première preuve* : Considérons la matrice compagnon A de polynôme caractéristique $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k)$. Par 2) b), A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D$.

Seconde preuve : Il s'agit de prouver que tout endomorphisme diagonalisable $u \in \mathcal{L}(E)$ sur un $\mathbb{C}$-ev de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est cyclique.

Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs propres de u, avec $u(x_i) = \lambda_i x_i$.

Posons $x = e_1 + e_2 + ... + e_n$. Alors $u^j(x) = \lambda_1^j e_1 + \lambda_2^j e_2 + ... + \lambda_n^j e_n$.

La matrice de $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice de Van der Monde, inversible car les λ_j sont distincts. Donc $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E, et u est cyclique.

Donc il existe une base où la matrice de u est une matrice compagnon.

5) a) Considérons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

Il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.

On vérifie aisément que $(u, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est libre, donc est une base de E.

En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1})$ non nul tel que $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x) = 0$.

On considère $k = \min\{j \mid \alpha_j \neq 0\}$.

En composant par u^{n-k-1}, on obtient $\alpha_k u^{n-1}(x) = 0$, donc $\alpha_k = 0$, d'où une contradiction.

b) On considère la matrice de passage $P = (X, MX, ..., M^{n-1}X)$. On a $M^n X = 0$.

Ainsi, $P^{-1}MP$ est la matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $P^{-1}XY^TP = (P^{-1}X)\left(Y^TP\right) = E_1Z^T$, où le vecteur Z est défini par $Z^T = Y^TP$.

Autrement dit, par le changement de base P, on se ramène au cas où $X = E_1$.

Donc $P^{-1}NP = A + E_1Z^T = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_3 & z_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, où $Z^T = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_3 & z_n \end{pmatrix}$.

La transposée est $\begin{pmatrix} z_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ z_2 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ z_3 & \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ z_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & z_n \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & z_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z_1 \end{pmatrix}$,

en inversant l'ordre des vecteurs de la base $(e_j \longmapsto e_{n+1-j})$.

Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique, car $(xI_n - A)^T = xI_n - A^T$.

On conclut donc avec 1) en prenant $z_j = -b_{n-j}$.