Opus 08. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

Une matrice compagnon est une matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Polynômes caractéristique

On considère $P_n(x) = \det(xI_n - A)$. Montrer que $\boxed{P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k}$ de trois façons :

a) En développant selon la première ligne et par récurrence sur n.

b) En développant selon la dernière colonne.

Indication : Le déterminant s'écrit $a_0 C_0 + a_1 C_1 + ... + a_{n-2} C_{n-2} + (x + a_{n-1}) C_{n-1}$, avec

$$C_k = (-1)^{n-1-k} \left| \begin{array}{cccc|cccc} x & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & \ddots & 0 & \vdots & & & & \\ 0 & -1 & x & 0 & & O & & \\ 0 & 0 & -1 & x & & & & \\ \hline & & & & -1 & x & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ & O & & & 0 & \ddots & \ddots & x \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$, avec des blocs d'ordres k et $(n-1-k)$.

c) En opérant sur les lignes (méthode du pivot) en supposant x non nul.

2) Sous-espaces propres

a) Montrer que les sev propres $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ sont de dimension ≤ 1.

b) Montrer que A est diagonalisable ssi P_n est scindé à racines simples.

3) Matrices à diagonale dominante

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{1 \leq j \leq n \text{ avec } j \neq i} |a_{ij}|$.

Montrer qu'il n'existe pas de vecteur $X \in K^n$ non nul tel que $AX = 0$. En déduire que A est inversible.

Indication : On raisonne par l'absurde et on suppose que $X = (x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0)$ existe.

Considérer p tel que $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. D'où $a_{pp} x_p = -\sum_{j \neq p} a_{pj} x_j$, et conclure à une contradiction.

b) *Disques de Gerschgorin*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de A. Montrer $\exists\, i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

c) *Application aux matrices compagnons*

Soit λ une racine du polynôme $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Montrer que $|\lambda| \leq 1 + \max_{0 \leq k < n} |a_k|$.

4) Endomorphismes cycliques

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est une matrice compagnon.

Terminologie : On dit alors que u est cyclique.

b) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des nombres complexes distincts. On pose $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k)$.

Montrer que $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est semblable à la matrice compagnon de polynôme caractéristique $P_n(x)$.

5) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre n, c'est-à-dire $M^n = O_n$ et $M^{n-1} \neq O_n$.

a) Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

b) (★★) (*oral X*) Soit un polynôme $Q_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ unitaire de degré n.

Montrer qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n$ tel que $Q_n(x)$ est le polynôme caractéristique de $N = M + XY^T$.