Opus 07. Algèbre linéaire. Corrigé

Exercice A. Lemmes de factorisation

1) a) Supposons $\exists\, v,\ w = v \circ u$. Alors $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.

Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. On a $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

On sait que $\widehat{u} : S \to \operatorname{Im} u \quad x \longmapsto u(x)$ est un isomorphisme.

On considère alors v définie par $\forall x \in \operatorname{Im} u,\ v(x) = (\widehat{u})^{-1}(x) \in E$.

On choisit v arbitrairement sur un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$. Ce qui définit v complètement.

On a bien $w = v \circ u$.

Variante : Soit $(e_1, ..., e_r)$ une base d'un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

Alors $(u(e_1), ..., u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$, qu'on complète en une base $(u(e_1), ..., u(e_r), f_{r+1}, ..., f_n)$ de F.

On définit v par $v(u(e_j)) = e_j$ si $j \in [\![1, r]\!]$ et $v(f_j)$ choisi arbitrairement pour $j \in [\![r+1, n]\!]$.

b) On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_r, ..., e_p)$ adaptée à $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$, une base $\mathcal{C}$ adaptée à $F = \operatorname{Im} u \oplus T$, et une base arbitraire $\mathcal{D}$ de G.

On a alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\, w = \left(\begin{array}{c|c} A & O \end{array}\right)$, où M est carrée inversible.

On a $\left(\begin{array}{c|c} AM^{-1} & * \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & O \end{array}\right)$, donc on définit v par $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}\, v = \left(\begin{array}{c|c} AM^{-1} & * \end{array}\right)$.

2) Supposons $\exists\, u,\ w = v \circ u$. Alors $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$.

On considère $(e_j)_{j \in I}$ une base de E.

Pour tout j, on a $w(e_j) \in \operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v.$, donc il existe f_j tel que $v(f_j) = w(e_j)$.

On définit u linéaire par $u(e_j) = f_j$ pour tout J.

On a bien $w(e_j) = (v \circ u)(e_j)$ pour les $e\{j\}$ donc par linéarité, $w = v \circ u$.

Exercice B

1) a) On considère $v : F \to E \quad x \longmapsto u(x)$. On a $\operatorname{Im} v = u(F)$ et $\operatorname{Ker} v = F \cap \operatorname{Ker} u$.

On conclut avec le théorème du rang : $\dim \operatorname{Im} v = \dim F - \dim \operatorname{Ker} v$.

b) On a $\operatorname{Im} u^2 = u(\operatorname{Im} u)$. Par a) appliqué à $F = \operatorname{Im} u$, on a donc $\operatorname{rg}(u^2) = \operatorname{rg}(u) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u)$.

Donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u^2)$ ssi $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 0$, c'est-à-dire ssi $(\operatorname{Ker} u) \oplus (\operatorname{Im} u)$.

2) $(\Rightarrow)$ Supposons $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^2)$. Notons $u : E \to E$ l'endomorphisme associé à A, avec $E = K^n$.

Alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u^2)$. Donc par 1) b), on a $(\operatorname{Ker} u) \oplus (\operatorname{Im} u)$.

Par le théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim E$, donc $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

On choisit une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ adaptée à $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.

Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $A' = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $B \in \mathcal{M}_r(K)$ et $r = \operatorname{rg} u$.

D'autre part, la restriction de l'endomorphisme u à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme dont B est la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$.

On en conclut que B est inversible. Comme A et A' représentent u, alors A et A' sont semblables.

($\Leftarrow$) Supposons A semblable à $A' = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où $B \in GL_r(K)$ est inversible. On a $(A')^2 = \left(\begin{array}{c|c} B^2 & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.
Comme B est inversible, alors B^2 aussi, et $\operatorname{rg} B^2 = r = \operatorname{rg} B$.

On en conclut que $\operatorname{rg} u^2 = \operatorname{rg}(A')^2 = \operatorname{rg}(B^2) = \operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A') = \operatorname{rg}(u)$.

Exercice C

1) a) Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $u(z) = \alpha z$. Alors $\lambda x + \mu y = \alpha x + \alpha y$.

Comme on sait par le cours que (x, y) est libre, alors on obtiendrait $\lambda = \alpha = \mu$, ce qui contredit $\lambda \neq \mu$.

b) Supposons que tout vecteur non nul est vecteur propre : pour tout $x \neq 0$, il existe λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.

Par a), λ_x ne dépend pas de x. Donc $u(x) = \lambda \operatorname{Id}$. (*Remarque* : Réciproque immédiate).

2) a) On considère la projection v sur Kx parallèlement à supplémentaire S de Kx dans E.

b) Supposons que u commute avec tout endomorphisme. Considérons $x \in E$ non nul, et v tel que $\operatorname{Im} v = Kx$ (cf a)). On a $u \circ v = v \circ u$ donc $\operatorname{Im} v = Kx$ est stable par u.

Donc x est un vecteur propre de u. Par 1)b), u est une homothétie.

3) On a $A = \sum_{(k,l)} a_{kl} E_{kl}$. Comme $AE_{ij} = E_{ij} A$, alors $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} E_{il}$.
D'où a fortiori $a_{ii} = a_{jj}$ et $\forall k \neq i$, $a_{ki} = 0$. Comme (i, j) arbitraire, $A = \lambda I_n$.

Exercice D. Décomposition de Fitting

1) Pour tout $y = v(x) \in \operatorname{Im} v$, on a $u(y) = v(u(x)) \in \operatorname{Im} v$, donc $\operatorname{Im} v$ est stable par u.

Sachant que u^k commute avec u, on en déduit que les I_k sont stables par u.

2) On a $u^{k+1} = u^k \circ u$, donc $\operatorname{Im}(u^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(u^k)$. *Remarque* : De façon générale, $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

De même, on a $u^{k+1} = u \circ u^k$, donc $\operatorname{Ker}(u^k) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+1})$. *Remarque* : De façon générale, $\operatorname{Ker}(u \circ v) \subset \operatorname{Ker} v$.

3) La suite $(\dim I_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une suite d'entiers naturels décroissante, et on a $\dim I_0 = n$.

Il existe donc $p \in \{0, 1, ..., n\}$ tel que $\dim I_p = \dim I_{p+1}$.

En effet, sinon, on aurait $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\dim I_{k+1} \leq (\dim I_k) - 1$, d'où $\dim I_n < n - n = 0$, ce qui est absurde.

Comme $\dim I_p = \dim I_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$, alors $I_{p+1} = I_p$.

En choisissant la plus petite valeur p possible, on obtient le plus petit entier naturel $p \leq n$ tel que $I_p = I_{p+1}$.

4) On a toujours $I_{k+1} = u(I_k)$, donc $u(I_p) = I_p$, donc la restriction de u à I_p est surjective (et bijective : dim finie).

5) Par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(I_p) = I_p$, c'est-à-dire $\forall k \geq p$, $I_k = I_p$.

En particulier, $I_{2p} = I_p$, c'est-à-dire $u^p(I_p) = I_p$.

Donc la restriction de u^p à I_p est un automorphisme. Donc $I_p \cap N_p = \{0\}$.

Or, par le th du rang, on a $\dim I_p + \dim N_p = \dim E$. On en déduit que $I_p \oplus N_p = E$.

6) On choisit une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ adaptée à $I_p \oplus N_p = E$.

Les sous-espaces vectoriels I_p et N_p sont stables par u (car u^p commute avec u).

La restriction de u à I_p est bijective donc sa matrice A dans la base $\mathcal{B}_1$ est inversible.

La restriction de u à N_p est nilpotente (car $\forall x \in N_p$, $u^p(x) = 0$), donc sa matrice N dans la base $\mathcal{B}_2$ est nilpotente.

On conclut en sachant que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & N \end{array}\right)$.

<u>Exercice E. Décomposition de Dunford</u>

1) On applique la décomposition de Fitting à la matrice $A - \lambda_1 I_n$.

La matrice $A - \lambda_1 I_n$ est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} N_1 & O \\ \hline O & M \end{array}\right)$, avec N_1 nilpotente et M inversible, c'est-à-dire $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Donc A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 I_d + N_1 & O \\ \hline O & B \end{array}\right)$, avec N_1 nilpotente et $\lambda_1 \notin \mathrm{Sp}(B)$.

Comme $\chi_A(x) = (X - \lambda_1)^d \chi_M(x)$ et et $\lambda_1 \notin \mathrm{Sp}(B)$, alors $d = m_1$ et $\chi_B(x) = (X - \lambda_2)^{m_2} ... (X - \lambda_{r-1})^{m_{r-1}}$.

Par hypothèse de récurrence simple sur le nombre r de valeurs propres distinctes, B est semblable à une matrice diagonale par blocs, où les $(r-1)$ blocs sont de la forme $\lambda_j I_{m_j} + N_j$, où N_j est nilpotente et $2 \leq j \leq r$.

On conclut en utilisant le résultat suivant :

si B est semblable à $B' = Q^{-1}BQ$, alors $\left(\begin{array}{c|c} M_1 & O \\ \hline O & B \end{array}\right)$ est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} M_1 & O \\ \hline O & B' \end{array}\right)$ via $P = \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & Q \end{array}\right)$.

Remarque : On peut aussi raisonner par récurrence forte sur n.

Remarque culturelle : On en déduit que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est diagonalisable et où N nilpotente telles que $DN = ND$. On peut aussi prouver que cette décomposition est unique.

2) Commençons par prouver le théorème de Cayley-Hamilton pour toute matrice de la forme $M = \lambda I_m + N$, où $N \in \mathcal{M}_m(K)$ est nilpotente. On a $\chi_M(x) = (x - \lambda)^m$.

Or, on sait que $N^m = O_m$, donc $(M - \lambda I_m)^m = O_m$, c'est-à-dire $\chi_M(M) = O_m$.

Par 1),le cas général se ramène à une matrice M diagonale par blocs $M_1, ..., M_r$.

On a alors $\chi_A(x) = \prod_{k=1}^r (x - \lambda_k)^{m_k}$, et comme $(M_k - \lambda I)^{m_k} = O$, alors $\chi_A(A) = O$ (chaque bloc s'annule).

<u>**Exercice F. Preuve du théorème de Cayley-Hamilton**</u>

1) Par dimension, la famille $(x, u(x), ..., u^n(x))$ est liée.

Donc il existe un plus petit entier naturel $p \leq n$ tel que $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est liée.

2) Alors $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre, donc $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$: en effet, un des vecteurs de la famille $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est combinaison linéaire des précédents, et c'est donc nécessairement $u^p(x)$.

Le sev F est donc stable car $u(F) = \mathrm{Vect}(u(x), ..., u^p(x)) \subset F$ et que $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$.

Comme $\mathcal{B}$ est libre, $\mathcal{B}$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

3) On considère v la restriction de u à $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$.

La matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon M, où $u^p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$.

On sait que $\chi_v(X) = X^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$. Donc $\chi_v(u)(x) = \overrightarrow{0}$.

Or, par a), χ_v divise χ_u, c'est-à-dire $\chi_u(X) = Q(X)\chi_v(X)$. Donc $\chi_u(u) = Q(u) \circ \chi_v(u)$, donc $\chi_u(u)(x) = \overrightarrow{0}$.