Opus 07. Algèbre linéaire

Exercice A. Lemmes de factorisation

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$ en dim finie (ou infinie).

1) a) Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$ ssi $\exists\, v \in \mathcal{L}(F,G)$, $w = v \circ u$.

b) On se place ici en dimension finie. On suppose $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.
Montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de E, F et G telles que

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \text{ et } \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}} w = \left(\begin{array}{c|c} A & O \end{array}\right), \text{ où } M \text{ est carrée inversible}$$

En déduire une nouvelle preuve de l'existence de v telle que $w = v \circ u$.

2) Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Im} v$ ssi $\exists\, u \in \mathcal{L}(F,G)$, $w = v \circ u$.

Exercice B

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E un ev de dimension finie.

a) Montrer que pour tout sev de E, on a $\dim u(F) = \dim F - \dim(F \cap \operatorname{Ker} u)$.

Indication : Appliquer le théorème du rang à $v : F \to E \;\; x \longmapsto u(x)$, restriction à F de l'application linéaire u.

b) Montrer que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u^2)$ ssi $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
Montrer que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^2)$ ssi A est semblable à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ où $B \in GL_r(K)$ est inversible.

Indication : Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifiant $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^2)$, on notera u l'endomorphisme associé à A.

Exercice C. Caractérisation des homothéties vectorielles

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u de valeur propre λ ssi $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$.

a) Soient x et y deux vecteurs propres associés à des valeurs propres λ et μ distinctes, c'est-à-dire $\lambda \neq \mu$.
Montrer que la famille (x, y) est libre et que le vecteur $z = x + y$ n'est pas un vecteur propre de u.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u.
Montrer que u est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}$).

2) a) Soit $x \in E$ non nul. Expliciter un endomorphisme v tel que $\operatorname{Im} v = Kx$.

b) *Rappel* : Lorsque u et v commutent (c'est-à-dire $u \circ v = v \circ u$), alors $\operatorname{Im} v$ est stable par u.

Montrer que les seuls endomorphismes commutant avec tout endomorphisme sont les homothéties.

3) On propose une autre preuve de 2) b), valable en dimension finie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ commutant avec toute matrice. En utilisant $AE_{ij} = E_{ij}A$, montrer que $A = \lambda I_n$.

Exercice D. Décomposition de Fitting

Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension n.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$ et $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$.

1) Soit v un endomorphisme commutant avec u. Montrer que $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u.

En déduire que les I_k sont stables par u.

2) Montrer que $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (pour l'inclusion) et que $(N_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion).

3) Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel $p \leq n$ tel que $I_p = I_{p+1}$.

4) Montrer que la restriction de u à I_p est un automorphisme (= bijectif).

5) Montrer que $\forall k \geq p$, $I_k = I_p$. En déduire que $I_p \oplus N_p = E$.

6) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & N \end{array}\right)$, où A inversible et N nilpotente.

Remarque culturelle : On sait que $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v) - \dim(\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Ker}\, u)$.

On en déduit en prenant $v = u^k$ que $\dim(I_{k+1}) = \dim(I_k) - \dim(I_k \cap \mathrm{Ker}\, u)$.

Ainsi, la suite $(\dim(I_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, mais l'écart $\dim(I_k) - \dim(I_{k+1})$ est lui-même décroissant.

Exercice E. Décomposition de Dunford

On suppose ici connue la décomposition de Fitting.

1) On considère $A \in \mathcal{M}_n(K)$ dont le polynôme caractéristique χ_A est scindé.

On pose $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}$, où les λ_j, avec $1 \leq j \leq r$, sont deux à deux distincts.

Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r \end{pmatrix}$,

les blocs M_j étant de la forme $M_j = \lambda_j I_{m_j} + N_j$, où I_{m_j} désigne la matrice identité et où N_j est nilpotente.

Indication : Considérer la matrice $B = A - \lambda_1 I_n$ et raisonner par récurrence.

2) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton ; Le polynôme caractéristique est annulateur.

Exercice F. Preuve directe du théorème de Cayley-Hamilton

Soient un K-ev E de dimension n et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Soit F un sev de E stable par u. On note $v : F \to F \quad x \longmapsto u(x)$ l'endomorphisme restriction de u à F.

Montrer que le polynôme caractéristique χ_v de v divise le polynôme caractéristique de u.

2) On fixe désormais $x \in E$. Montrer qu'il existe un plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est liée.

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est stable par u et que $\mathcal{B} = (x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une base de F.

3) Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in K^n$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$.

On *admet* que $\chi_M(X) = X^p - \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$. En utilisant les notations de 1) et 2), montrer que $\chi_u(u)(x) = \overrightarrow{0}$.