Opus 06. Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice A. Exemples d'utilisations du théorème de convergence dominée

On pose $\forall x \geq 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\, du$ et $\forall x > 0,\ L(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}}\, dt$ (transformée de Laplace)

1) a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) On donne $f(0) = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Déterminer un équivalent de $L(x)$ en $x = 0^+$ et en $x = +\infty$.

Exercice B. Calcul de l'intégrale de Dirichlet. On pose $\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\, e^{-xt}\, dt}$.

1) Justifier que $\sup_{t>0} \left(\dfrac{1-\cos t}{t}\right) \leq 1$ et que $\sup_{t>0} \left(\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et que $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$.

4) Montrer que f et f' convergent vers 0 en $+\infty$.

5) Déterminer les primitives sur $]0, +\infty[$ des fonctions $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto \ln(x^2+1)$.

On en déduit (*admis ici*) que $\forall x > 0,\ f(x) = x \ln x - \dfrac{1}{2} x \ln(x^2+1) - \arctan x + \dfrac{\pi}{2}$.

6) Déduire des questions précédentes que $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice C. Pour x et $y > 0$, on pose $\boxed{I(x,y) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-yt} - e^{-xt}}{t}\, dt}$.

1) Justifier l'existence de $I(x,y)$.

2) Démontrer que $\dfrac{\partial I}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}$ et en déduire $I(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Exercice D.On considère $\boxed{f(x) = \int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x\, dt}$.

1) Montrer avec soin que $f(x)$ est défini pour tout $x > -1$.

2) Justifier que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$, et que $f'(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$.

4) En déduire que $\forall x > -1,\ f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$.

Exercice E

1) Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x+...+x^{n-1}}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

2) On pose $\boxed{I_n = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x+x^2+...+x^n}}$ et $\boxed{J_n = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}}$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

3) a) ($\bigstar$) En utilisant le changement de variable $x = 1 + \dfrac{u}{n}$, montrer que $J_n \sim \dfrac{\lambda}{n^2}$, où $\lambda = \int_0^{+\infty} \dfrac{u}{e^u - 1}\, du$.

b) Calculer λ. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.