Opus 06 bis. Intégrales de Dirichlet

1) a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$.

b) Montrer que pour $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ converge.

c) Montrer que pour tout $\beta > 1$, $\int_0^{+\infty} \sin(t^\beta)\, dt$ converge.

2) On souhaite montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$. On pose $\forall x \geq 0,\ L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt$.

a) Montrer que L est continue sur $[0, +\infty[$ et que L est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Indication : Montrer que $L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^2}\, dt$, où $\phi(t) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(i-x)t} - 1}{i - x}\right)$.

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} L(x) = 0$.

c) Montrer que $L'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$. En déduire que $\forall x > 0,\ L(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

d) Conclure.

3) On considère $\forall x \geq 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt$.

a) Pour $x > 0$, mettre $f(x)$ sous la forme $\cos(x)a(x) + \sin(x)b(x)$.

b) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0,\ f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$.

d) On pose $\forall x > 0,\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$. Montrer que $\forall x > 0,\ g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$.

e) Montrer que $\forall x > 0,\ y(x) = f(x)$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

4) On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{n(e^{u/n} - 1)}\, du$ et $J_n = n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + n^2}$.

a) Montrer que I_n converge et que $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{e^{u/n} - 1}\, du = n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + n^2}$.

b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

c) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$.

Indications : a) La fonction intégrée est prolongeable par continuité en 0 et est en $O_{+\infty}(1/t^2)$.

On a $\frac{\sin u}{e^{u/n} - 1} = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} e^{u(-k/n+i)}\right)$ et $\int_0^{+\infty} e^{u(-k/n+i)}\, du = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{k/n - i}\right) = \frac{n^2}{k^2 + n^2}$.

On peut utiliser le th ITT car $\int_0^{+\infty} |\sin u|\ e^{-ku/n}\, du \leq \int_0^{+\infty} u\ e^{-ku/n}\, du = O(1/k^2)$ lorsque $k \to +\infty$.

b) Utiliser $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2} \leq J_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2}$ et $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + n^2} = \frac{1}{n} \int_{a/n}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \frac{\pi}{2}$.

c) On a bien $\forall u > 0,\ \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin u}{n(e^{u/n} - 1)} = \frac{\sin u}{u}$.

Mais comme l'intégrale limite est semi-convergente, on doit faire une IPP (comme au 2)) avant de pouvoir appliquer le th de convergence dominée (qui s'applique à des fonctions intégrables).

Corrigé

1) a) $\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_e^A + \int_e^A \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$ qui converge vers l'intégrale abs cv $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt$.

b) Comme au a), on montre que $\int_\varepsilon^A \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ cv et que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+1}}\, dt$.

c) Avec $t = u^{1/\beta}$ bijection C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \sin(t^\beta)\, dt = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{1-1/\beta}}\, du$.

2) a) Par une IPP, $L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^2}\, dt$, où $\phi(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(i-x)t}-1}{i-x}\right)$.

On a $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = \mathrm{Im}(1) = 0$ et $\phi''(t) = \mathrm{Im}\left(-(i-x)e^{(i-x)t}\right)$.

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a $|\phi(t)| \leq \frac{1}{2}\,|i-x| = \sqrt{1+x^2}$.

Soit $a > 0$. On a $\forall x \in [0, a]$, $\frac{|\phi(t)|}{t^2} \leq \frac{\sqrt{1+a^2}}{t^2}$ intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc L continue en 0.

Montrons que L est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Posons $f(t, x) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}$.

Soit $a > 0$. On a $\forall x \in [a, +\infty[$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)\right| = \left|t \sin(t)\, e^{-tx}\right| \leq te^{-ta}$ intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) On a $\left|\frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$, donc $|L(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} L(x) = 0$.

c) On a $\forall x > 0$, $L'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-tx}\, dt = -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(x-i)}\, dt\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Donc $L(x) = K - \arctan(x)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} L = 0$, alors $K = \frac{\pi}{2}$.

D'où $\forall x > 0$, $L(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

d) Comme L continue en 0, $L(0) = \lim_{0^+} L = \frac{\pi}{2}$.

3) a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, dt = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\, dt$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{(x+t)^2}\, dt$.

On conclut en utilisant la fonction de domination $\varphi(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$. intégrable sur $]0, +\infty[$.

c) Posons $f(t, x) = \frac{\sin t}{x+t}$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\frac{\sin t}{(x+t)^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \frac{2 \sin t}{(x+t)^3}$.

Par deux IPP, on a $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin t}{(x+t)^3}\, dt = \left[-\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{\cos t}{x+t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt$.

Donc $\forall x > 0$, $f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$.

Autre méthode : On utilise a) et on dérivé deux fois avec Leibniz.

d) Les théorèmes sur les intégrales paramétrées permettent de prouver que g est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et que $\forall x > 0$, $g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.

On a $\forall x > 0$, $g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$.

e) $y = (g - f)$ vérifie $(E) : y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$, donc $y(x) = A\cos(x - \varphi)$.

D'autre part, $\lim_{+\infty} y = 0$, car $\lim_{+\infty} g = \lim_{+\infty} f = 0$. D'où $A = 0$, et ainsi $\forall x > 0$, $f(x) = g(x)$.

De plus, g est continue en 0 (par continuité des intégrales paramétrées avec domination par $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$).

Comme f est aussi continue en 0, on obtient bien $f(0) = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$.