1) On utilise $\dfrac{|a_n|}{n} = |a_n| \ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

2) Montrer : $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{k+n} \leq \dfrac{1}{n}$, donc $\dfrac{1}{2} \leq S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k+n} \leq 1$.

En comparant S_n avec l'intégrale de $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t+n}$ décroissante, on a : $\int_1^{n+1} \dfrac{dt}{t+n} \leq S_n \leq \int_0^n \dfrac{dt}{t+n}$.

On en déduit $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k+n} \leq \ln(2)$. *Remarque* : Par pincement, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$.

3) Posons $a_n = \int_n^{2n} \dfrac{dt}{t^\alpha + 1}$. On a $\dfrac{(2n)-n}{(2n)^\alpha + 1} \leq a_n \leq \dfrac{(2n)-n}{n^\alpha + 1}$.

On en déduit que $a_n = O(n^{1-\alpha})$ et $n^{1-\alpha} = O(a_n)$. D'où $\sum a_n$ converge ssi $\alpha > 2$.

4) On a $|f(x)| \leq |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| \leq |L| + \varepsilon$.

5) $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\sum_{j=1}^n \overline{z_j}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{z_j} z_k = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2\sum_{j<k} \mathrm{Re}(\overline{z_j} z_k)$.

On a $\mathrm{Re}(\overline{z_j} z_k) \leq |\overline{z_j} z_k| = |z_j z_k|$, donc $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2\sum_{j<k} |\overline{z_j} z_k| = \left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^2$.

Il y a égalité ssi pour tous $j < k$, $\mathrm{Re}(\overline{z_j} z_k) = |\overline{z_j} z_k|$, donc ssi pour tous $j < k$, $\overline{z_j} z_k \in \mathbb{R}^+$.

Autrement dit, il y a égalité ssi les z_k non nuls ont le même argument.

Remarque : $\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 + 2\sum_{j<k} \langle x_j, x_k\rangle \leq \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|\right)^2$,

avec égalité ssi pour tous $j < k$, $\langle x_j, x_k\rangle = \|x_j\| \, \|x_k\|$, donc ssi les x_k sont colinéaires de même sens.

6) On a $(|f| - f) \geq 0$, donc $\int_a^b |f(t)| \ dt \geq \int_a^b f(t) \ dt$, avec égalité ssi $|f| - f = 0$, c'est-à-dire f positive.

De même, on a $(|f| + f) \geq 0$, donc $\int_a^b |f(t)| \ dt \geq -\int_a^b f(t) \ dt$, avec égalité ssi f négative.

Donc $\left|\int_a^b f(t) \ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)| \ dt$, avec égalité ssi f est de signe constant.

7) On suppose pour alléger les a_k et z_k non nuls.

$\left|\sum_{k=1}^n a_k z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k z_k| \leq \sup_{1\leq k\leq n} |z_k| \ \ \sum_{k=1}^n |a_k|$.

Il a égalité ssi les $a_k z_k$ ont même argument (première égalité) et si les z_k ont même module.

8) $\int_a^b f(t) \ e^{i\lambda t} \ dt = \left[f(t) \ \dfrac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_a^b - \int_a^b f'(t) \ \dfrac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \ dt$.

Donc pour $\lambda > 0$, $\left|\int_a^b f(t) \ e^{i\lambda t} \ dt\right| \leq \dfrac{K}{\lambda}$, où $K = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| \ dt$.

Remarque : Attention à bien appliquer de façon méthodique l'intégalité triangulaire.

9) Par Cauchy-Schwarz, $\sqrt{\int_a^b f(t)^2 \ dt}\sqrt{\int_a^b f''(t)^2 \ dt} \geq \left|\int_a^b f(t) f''(t) \ dt\right|$.

Par IPP, $\int_a^b f(t) f''(t) \ dt = -\int_a^b f'(t)^2 \ dt$, car $f(a) = f(b) = 0$. D'où l'inégalité.

Il y a égalité ssi f'' et f colinéaires, c'est-à-dire $f'' = \lambda f$.

Les solutions s('annulant en a sont les $K\sin(\omega(x-a))$, $K\,\mathrm{sh}(\omega(x-a))$ et $K(x-a)$.

Les solutions solutions non nulles s'annulant en a et en b sont donc les $K\sin(\omega(x-a))$, avec ω tel que $\omega(b-a)\in\pi\mathbb{Z}$

(on obtient une suite de valeurs possibles, cf solutions des cores vibrantes).

11) Il s'agit finalement de déterminer $A=\sup\{\left\{\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},\ (x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \text{ non nul}\right\}$

On va prouver qu'il s'agit d'un maximum.

On a par Cauchy-Schwarz, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\times 1\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)=n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Avec cas d'égalité ssi les x_k sont égaux. Donc $A=n$.

13) a) On fixe $z\in\mathbb{C}$. En prenant $\varphi(\theta)=e^{\theta z}$, avec $\theta\in[0,1]$, on a $\left|\varphi(1)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\right|\leq\dfrac{1}{(n+1)!}\sup_{[0,1]}\varphi^{(n+1)}$.

Donc $\left|e^z-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}\right|\leq\dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}M$, où $M=\sup_{\theta\in[0,1]}\left|e^{\theta z}\right|\leq\max(1,e^{\operatorname{Re} z})$, car $e^{\theta z}=e^{\theta\operatorname{Re}(z)}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, alors $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}=e^z$, c'est-à-dire $e^z=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$.

b) On prend $f(t)=\ln(1+t)$. On a $f^{(n+1)}(t)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$, donc $\sup_{t\geq 0}\left|f^{(n+1)}\right|\leq n!$

Donc $\forall x\in[0,1]$, on a donc $\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|\leq\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\leq\dfrac{1}{n+1}\to 0$. D'où le résultat.

14) a) On intègre $(n+1)$ fois la relation $\lambda\leq f^{(n+1)}\leq\mu$ sur $[0,x]$.

Autrement dit, une autre façon de voir est de considérer $R(x)=f(x)-P_n(x)$.

On a $R(0)=R'(0)=...=R^{(n)}(0)$ et $R^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$.

On intègre $(n+1)$ fois la relation $\lambda\leq R^{(n+1)}\leq\mu$ sur $[0,x]$.

On obtient $\lambda\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\leq R(x)\leq\mu\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) On part de $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$, et on effectue n intégrations par parties successives.

On intègre 1 en $(t-x)$ puis en $\frac{1}{2}(t-x)^2$, etc : on choisit toujours la primitive qui s'annule en x.

Donc $\int_0^x f'(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\dfrac{(t-x)^k}{k!}f^{(k)}(t)\right]_0^x+(-1)^n\int_0^x\dfrac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$.

On obtient bien $f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$.

On retrouve l'inégalité de Taylor-Lagrange en utilisant l'inégalité d ela moyenne :

Pour $x\geq 0$, les $(x-t)$ sont ≥ 0, donc : $\left|\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\right|\leq\left(\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}\,dt\right)\sup_{[0,x]}\left|f^{(n+1)}\right|$.

On obient $\int_0^x\dfrac{(x-t)^n}{n!}\,dt=\int_0^x\dfrac{u^n}{n!}\,du=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. On procède de même pour $x\leq 0$.

16) a) Résulte de $f(x)=O(x^2)$.

b) Par Taylor-young, on peut ptolonger $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ par continuité en 0, avec $\varphi(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$.

On obtient alors un fonction φ continue sur $[-1,1]$, donc majorée par un réel k D'où le résultat.

Remarque : En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on peut prendre $k=\dfrac{1}{2}\sup_{[-1,1]}\left|f''\right|$.

17) Par hypothèse, il existe k tel que $\forall x \geq x_0$ assez grand, $|f(x)| \leq \dfrac{k}{x^2}$.

Donc pour $x \geq x_0$, on a $[x, 2x] \subset [x_0, +\infty[$, donc $|g(x)| \leq \int_x^{2x} \dfrac{k}{x^2}\, dx = \dfrac{k}{2x}$, donc $g(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

18) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq p$ assez grand, $|a_n| \leq \varepsilon b_n$

Donc $\forall x \geq p$, $|A_n| \leq |A_p| + \varepsilon(B_n - B_p) \leq |A_p| + \varepsilon B_n$.

Pour n assez grand, $|A_p| \leq \varepsilon B_n$, car $\lim_{n \to +\infty} B_n = +\infty$. Donc $|A_n| \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

19) a) On étudie la fonction $\varphi(x) = f(x) - f(m) - (x - m)f'(m)$: on a $\varphi(m) = \varphi'(m) = 0$ et $\varphi'' \geq 0$, donc φ' est ≤ 0 sur $\mathbb{R}^-$ et ≥ 0 sur $\mathbb{R}^+$, d'où on déduit $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) On applique a) à exp et à $x \longmapsto -\ln(1 + x)$. En fait, les deux inégalités se déduisent l'une de l'autre.

c) Par positivité des termes, il suffit de prouver que $\forall \in [0, n[$, $1 + \dfrac{x}{n} \leq e^x$ et $e^{-x} \geq 1 - \dfrac{x}{n}$.

20) a) On a $f(x_k) \geq f(m) - (x_k - m)f'(m)$.

Donc $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \geq f(m) - 0$, car la valeur moyenne des $(x_k - m)$ vaut 0.

b) On applique l'inégalité précédente à $-\ln$. On a donc $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln(m)$.