**Opus n°5. Inégalités**

## A. Une inégalité classique

Pour tous réels $x$ et $y$, on a $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

**1)** Montrer que si la série $\sum a_n^2$ converge, alors la série $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge.

## B. Sommations des inégalités

**2)** Montrer : $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \leq 1$, puis le meilleur encadrement : $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \leq \ln(2)$.

**3)** Soit $\alpha > 0$. Montrer (à l'aide d'évaluations "grossières") que $\sum \int_n^{2n} \frac{dt}{t^\alpha+1}$ converge ssi $\alpha > 2$.

## C. Inégalités triangulaires (avec cas d'égalité) et inégalités de la moyenne

*Principe fondamental* : On a $|x+u| \leq |x|+|u|$ et $|x+u| \geq |x|-|u|$.

*Exemple* : Dans $\mathbb{C}$, si $\forall k$, $|a_k - b_k| \leq \varepsilon_k$, alors $|\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k| \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$.

*Exemple* : Dans $\mathbb{C}$, $|a_0 + ... + a_n z^n| \geq |a_n z^n| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right|$.

**4)** Montrer que si $|f(x) - L| \leq \varepsilon$, alors $|f(x)| \leq |L| + \varepsilon$.

**5)** Evaluer $|\sum_{k=1}^n z_k|^2$ dans $\mathbb{C}$. En déduire $|\sum_{k=1}^n z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ en précisant les cas d'égalité.

*Remarque* : Généraliser à tout espace $E$ euclidien : $\|\sum_{k=1}^n x_k\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$ ; cas d'égalité ?

**6)** Déterminer les cas d'égalité dans $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$, avec $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $a < b$.

**7)** (♣) Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer les inégalités de la moyenne et déterminer les cas d'égalité :

$\forall (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|\sum_{k=1}^n a_k z_k| \leq \sup_{1\leq k\leq n} |z_k| \ \ \sum_{k=1}^n |a_k|$ et $|\sum_{k=1}^n a_k z_k| \leq \sup_{1\leq k\leq n} |a_k| \ \ \sum_{k=1}^n |z_k|$.

**8)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\ e^{i\lambda t}\ dt = 0$.

## D. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout produit scalaire sur $E$, on a $\langle f, g\rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2$, avec égalité ssi $f$ et $g$ sont colinéaires.

*Exemple* : Pour tous réels, $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$ en considérant $(|x_k|)_{0\leq k\leq n}$ et $(|y_k|)_{0\leq k\leq n}$.

**9)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que $\int_a^b f'(t)^2\ dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ dt}\sqrt{\int_a^b f''(t)^2\ dt}$. Préciser les cas d'égalité.

**10)** (★) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ vérifiant $f(0) = 0$.

Montrer que $\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 dx \leq 2\int_0^1 \frac{f(x)f'(x)}{x}\ dx$. En déduire $\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 dx \leq 4\int_0^1 f'(x)^2\ dx$.

## E. Optimisation

**11)** ($\clubsuit$) Déterminer *la meilleure* constante $A$ telle que $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq A \sum_{k=1}^n x_k^2$.

**12)** ($\bigstar$) On note $E = \{f \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \mid f(a) = f(b) = 0\}$.

Déterminer la plus petite constante $K$ tel que $\forall f \in E$, $\int_a^b |f(t)| \ dt \leq K \ \sup |f'|$.

*Indication* : Faire intervenir $c = \dfrac{1}{2}(a+b)$ et utiliser l'IAF.

## F. Inégalité de Taylor-Lagrange et DSE

*Inégalité de Taylor-Lagrange* : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$.

Le cas $n = 0$ correspond à l'inégalité des accroissements finis : $|f(x) - f(0)| \leq M\,|x|$, où $M = \sup_{(0,x]} |f'|$.

**13)** *Utilisations de l'inégalité de Taylor-Lagrange dans les développements en série entière.*

a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. *Indication* : Considérer $\varphi(\theta) = e^{\theta z}$, avec $\theta \in [0,1]$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

En particulier, $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + ...$

**14)** a) On suppose $\lambda \leq f^{(n+1)} \leq \mu$ sur $[0,x]$. On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Montrer (par une étude de fonction) que $\lambda \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + P_n(x) \leq f(x) \leq \mu \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + P_n(x)$.

Montrer (par une étude de fonction) que $\lambda \dfrac{x^n}{n!} + P_n(x) \leq f(x) \leq \mu \dfrac{x^n}{n!} + P_n(x)$.

*Remarque* : On peut en particulier retrouver *l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

La preuve la plus classique consiste à utiliser la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

b) Montrer que $f(x) = P_n(x) + \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \ dt$. En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange.

**15)** *Formule de Taylor-Lagrange* (*hors-programme*) généralisant le TAF (cas $n = 0$) :

Déduire de 14) avec le TVI qu'il existe $y \in [0,x]$ tel que $f(x) - P_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y)$.

## G. Inégalités locales et inégalités globales

**16)** Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $k$ tel que $f(x) \leq kx^2$ au voisinage de 0, c'est-à-dire sur un intervalle $[-\alpha, \alpha]$, avec $\alpha > 0$.

b) Montrer qu'il existe $k$ tel que la parabole $y = kx^2$ est au-dessus du graphe de $f$ sur $[-1,1]$.

*Indication* : Considérer la fonction continue $\varphi : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x^2}$ (prolongeable par continuité en 0).

**17)** Montrer que si $f(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $g(x) = \int_x^{2x} f(t) \ dt$ vérifie $g(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

**18)** *Sommation des relations de comparaisons*. On suppose $a_n = \mathfrak{o}\,(b_n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 0$.

On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$, alors $A_n = \mathfrak{o}(B_n)$.

Retrouver le théorème de Cesàro.

## H. Inégalités de convexité

On suppose $f'' \geq 0$. On dit que l'application $f$ est convexe.

**19)** a) Montrer que $f(x) \geq f(m) + (x-m)f'(m)$ : la courbe est au-dessus de ses tangentes.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ et $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, n[$, $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^x \leq \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

**20)** a) En prenant $m = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ dans 19) a), montrer que $f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

b) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : Pour $x_k > 0$, $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 ... x_n)^{1/n}$.