Opus 05 bis. Fonctions convexes. Corrigé abrégé

1) Supposons $a < b < c$. On écrit b comme valeur moyenne de a et de c :

$$b = (1-\lambda)a + \lambda c, \text{ avec } \lambda = \frac{b-a}{c-a} > 0 \text{ et } 1-\lambda = \frac{c-b}{c-a}$$

Lorsque b décrit $]a, c[$, λ décrit $]0, 1[$.

On en déduit que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

(ii) $\forall (a, b, c) \in I^3$, $a < b < c \Rightarrow f(b) \leq \dfrac{c-b}{c-a} f(a) + \dfrac{b-a}{c-a} f(c)$

Et $f(b) \leq \dfrac{c-b}{c-a} f(a) + \dfrac{b-a}{c-a} f(c)$ s'écrit aussi $\Delta(a, b) \leq \Delta(a, c)$, qui équivaut à $\Delta(a, c) \leq \Delta(b, c)$.

Remarque : $\Delta(a, c)$ est compris entre $\Delta(a, b)$ et $\Delta(b, c)$, car $\Delta(a, c) = \dfrac{b-a}{c-a}\Delta(a, b) + \dfrac{c-b}{c-a}\Delta(a, b)$.

2) a) On a $\forall x \in]a, b[$, $\Delta(a, x) \leq \Delta(a, b)$ donc $f(x) \leq L(x)$.

On a $\forall x \in]-\infty, a[$, $\Delta(x, a) \leq \Delta(a, b)$ donc $f(x) \geq L(x)$.

Et $\forall x \in]b, +\infty[$, $\Delta(a, b) \leq \Delta(a, b)$ donc $f(x) \geq L(x)$.

b) Supposons f majorée. Alors toute droite d'interpolation est aussi bornée (car bornée sur $[a, b]$ par Weierstrass et bornée sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$, car $L \leq f$). Donc la droite est constante et $\Delta(a, b) = 0$ pour tous $a < b$.

3) a) Les pentes de f sur $[a, b]$ sont minorées par $\Delta(\alpha, a)$ et majorées par $\Delta(b, \beta)$.

Donc f est lipschitzienne sur $[a, b]$ car les pentes de f y sont bornées.

b) Soit x intérieur à I. Il existe $\varepsilon > 0$ telle que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Par a), f continue en x_0.

La fonction $x \longmapsto \Delta(x, x_0)$ est croissante sur $]x_0 - \varepsilon, x_0[$ et majorée par $\Delta(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Par le th de la limite monotone, il existe $f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0} \Delta(x, x_0)$.

De même pour la dérivée à droite.

c) On considère $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

4) (i) $\Rightarrow$ (ii) : Pour $a < x < b$, on a $\Delta(a, x) \leq \Delta(a, b) \leq \Delta(x, b)$.

En faisant tendre x vers a^+, on obtient $f'(a) \leq \Delta(a, b)$.

En faisant tendre x vers b^-, on obtient $\Delta(a, b) \leq f'(b)$..Donc $f'(a) \leq f'(b)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Etude de la fonction $\varphi(x) = f(x) - f'(a)(x - a)$:

x		a	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

.

(iii) $\Rightarrow$(i) : Par le TAF, pour $a < b < c$, $\Delta(a, b) = f'(x) \leq f'(y) = \Delta(b, c)$, où $x \in [a, b]$ et $y \in [b, c]$.

5) a) On choisit la pente m de L de sorte que $f'_g(a) \leq m \leq f'_d(a)$.

b) On peut se ramener au cas où les α_i sont strictement positifs et les x_i distincts.

On peut supposer $n \geq 2$, le cas $n = 1$ est immédiat.

Alors μ appartient à l'intérieur de i. Il existe par a) une droite L telle que $f \geq L$.

On a alors $f(x_i) \geq L(x_i)$, donc $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n) \geq \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + ... + \alpha_n L(x_n)$.

Comme L est affine, $\alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n) = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\, L(\mu)$.

On en déduit $\dfrac{\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \geq L(\mu) = f(\mu)$.

6) a) exp est convexe, donc au dessus de sa tangente en 0

$x \longmapsto \ln(1 + x)$ est concave donc en dessous de sa tangente en 0.

sin est concave sur $[0,\pi]$, donc en dessous de sa tangente en 0 et au dessus de sa corde sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) sin est concave sur $[0,\pi]$, donc $\frac{1}{3}\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(y)+\frac{1}{3}\sin(z)\leq\sin(\frac{1}{3}(x+y+z))=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $(\ln\ln)'\leq 0$, donc $\ln\ln$ est convace, d'où $\frac{1}{2}\ln\ln k+\frac{1}{2}\ln\ln(n-k)\leq\ln\ln\left(\frac{1}{2}n\right)$.

7) a) On pourrait utiliser 5) b) avc les sommes de Riemann.

Le plus simple est de reprendre la preuve du 5) b) en prenant $\mu=\int_0^1 g(t)\ dt$.

On a $\int_0^1 f(g(t))\ dt\geq\int_0^1 L(g(t))\ dt=L\left(\int_0^1 g(t)\ dt\right)=L(\mu)=f(\mu)$.

b) De même, avec $\mu=E(X)$, on a $E(f(X))\geq E(L(X))=L(E(X))=f(E(X))$.

8) On peut supposer $x_1,...,x_n$ strictement positifs.

Comme $\ln''\leq 0$, alors ln est concave (c'est-à-dire $-\ln$ convexe).

On a donc $\dfrac{\ln x_1+\ln x_2+...+\ln x_n}{n}\leq\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$. On conclut avec exp croissante.

9) On peut supposer u et v strictement positifs.

Par concavité de ln, on a : $\ln\dfrac{1}{p}\ln(u^p)+\dfrac{1}{q}\ln(v^q)\leq\ln\left(\dfrac{1}{p}u^p+\dfrac{1}{q}v^q\right)$.

En conposant par exp, on obtient $uv\leq\dfrac{1}{p}u^p+\dfrac{1}{q}v^q$.

b) On suppose les x_i non tous nuls et les y_i non tous nuls.

On pose $u_i=\dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $v_i=$. Par a), on a $u_iv_i\leq\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^p+\dfrac{1}{q}\left(\dfrac{|y_i|}{\|y\|_q}\right)^q$.

En sommant, on obtient $\sum_{i=1}^n\dfrac{|x_i|\,|y_i|}{\|x\|_p\,\|y\|_q}\leq\dfrac{1}{p}\times 1+\dfrac{1}{q}\times 1=1$. D'où le résultat.

10) Soient x et $y\in\mathbb{R}$.

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Delta_n=\left\{\dfrac{k}{2^n},\ 0\leq k\leq n^n\right\}$. Par exemple, $\Delta_1=\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$.

On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que $\forall\lambda\in\Delta_n$, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

On utilise le fait que si $\lambda=\dfrac{k}{2^{n+1}}\in\Delta_{n+1}$, alors :

- soit k est pair et $\lambda\in\Delta_n$
- soit k est impair, et $\lambda=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k-1}{2^n}+\dfrac{k+1}{2^n}\right)$, avec $\dfrac{k-1}{2^n}$ et $\dfrac{k+1}{2^n}\in\Delta_n$.

Ainsi, on a donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\lambda\in\Delta_n$, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

Or, tout réel $\lambda\in[0,1]$ s'écrit $\lambda=\lim_{n\to+\infty}\lambda_n$, où $\lambda_n=\dfrac{\lfloor 2^n\lambda\rfloor}{2^n}\in\Delta_n$.

Comme f est continue, on obtient $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. Donc f est convexe.

11) On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $2x_n\leq x_{n-1}+x_{n+1}$ donc $(x_{n+1}-x_n)$ est croissante.

Par le th de la limite monotone, il existe donc $L=\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

a) Par Césaro, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}=L$. Comme $x_n=O(n)$, alors $L\in\mathbb{R}$. D'où $x_n\sim nL$.

b) Avec a) et $x_n=O(1)$, on a donc $L=0$.

Donc $(x_{n+1}-x_n)\leq 0$, c'est-à-dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Minorée, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc.

c) On a $x_p-x_0=\sum_{n=0}^{p-1}(x_n-x_{n-1})$. Donc $(x_n-x_{n-1})_{1\leq n\leq p}$ change de signe.

Comme elle est croissante, il existe q tel que $x_n-x_{n-1}\leq 0$ pour $n\leq q$ et $x_n-x_{n-1}\geq 0$ pour $q<n\leq p$.

On en déduit que $x_0\geq x_1\geq...\geq x_q$ et $x_q\leq x_{q+1}\leq...\leq x_p$. D'où le résultat.

Remarque : Propriétés analogues pour une fonction convexe : par exemple, si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est convexe et $f(0)=f(1)$, car $f(x)\leq f(0)=f(1)$, car f est en dessous de la corde sur $[0,1]$.