Opus 05. Intégrations par parties et transformée d'Abel. Corrigé.

1) a) g' est intégrable car $\int_a^x |g'| = \int_a^x (-g') = g(a) - g(x)$ qui converge en $+\infty$).

Comme F est bornée, alors $Fg' = O(|g'|)$, donc Fg' est intégrable.

b) On prend $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. En intégrant par parties, $\int_a^x f(t)g(t)\ dt = [F(t)g(t)]_a^x - \int_a^x F(t)g'(t)\ dt$.
On a $\lim_{x\to+\infty}[F(t)g(t)]_a^x = 0$. D'autre part, Fg' est intégrable, donc il existe a fortiori $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x F(t)g'(t)\ dt$.

On en déduit qu'il existe $\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f(t)g(t)\ dt$.

2) a) Comme f est intégrable, alors F converge en $+\infty$ (car $x \longmapsto \int_a^x F'$ converge), donc F est bornée.
En effet, toute fonction continue sur $[a,+\infty[$ et convergente en $+\infty$ est bornée.

Autre preuve : Avec $F(x) = \int_a^x f$, on a : $|F(x)| = \left|\int_a^x f\right| \leq \int_a^x |f| \leq \int_a^{+\infty} |f|$.

b) On a $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\ dt = \int_0^T f(t)\ dt = 0$. Donc F est T-périodique donc bornée.
En effet, toute fonction continue sur $[a,+\infty[$ et T-périodique est bornée (et atteint ses bornes).

3) On applique a) avec $g(t) = t^{-\alpha}$ et $f(t) = \sin t$.

4) Toute fonction périodique f de moyenne m s'écrit $f(x) = m + f_0(x)$, où f_0 est T-périodique de moyenne nulle.
On a $\int_1^x \dfrac{f(t)}{t}\ dt = \int_1^x \dfrac{m}{t}\ dt + \int_1^x \dfrac{f_0(t)}{t}\ dt$.
Il résulte de 1) et 2) b) que $x \longmapsto \int_1^x \dfrac{f_0(t)}{t}\ dt$ converge (on prend ici $g(t) = \dfrac{1}{t}$).
Donc $x \longmapsto \int_1^x \dfrac{f(t)}{t}\ dt$ converge ssi $x \longmapsto \int_1^x \dfrac{m}{t}\ dt$ converge, donc ssi $m = 0$.
5) On pose $A_{-1} = 0$. L'idée naturelle est d'exprimer les a_k en fonction des A_k. On a donc :
$\sum_{k=0}^n a_k u_k = \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1})u_k = \sum_{k=0}^n A_k u_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1}u_k = \sum_{k=0}^n A_k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_{k+1}$.
Donc on obtient $\sum_{k=0}^n a_k u_k = u_n A_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_{k+1} = u_n A_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_{k+1} - u_k)$.

Autre méthode (moins élégante) : On peut aussi raisonner par récurrence (puisque la formule est donnée).

En effet, posons $w_n = u_n A_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_{k+1} - u_k)$. On a $w_0 = a_0 u_0$.
Et on a $w_{n+1} - w_n = (u_{n+1}A_{n+1} - u_n A_n) - A_n(u_{n+1} - u_n) = u_{n+1}(A_{n+1} - A_n) = u_{n+1}v_{n+1}$. D'où le résultat.

6) On a $A_k(u_{k+1} - u_k) = O(u_{k+1} - u_k)$, et la série à termes positifs $\sum(u_{k+1} - u_k)$ converge (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge).
Donc la série $\sum A_k(u_{k+1} - u_k)$ converge absolument.

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} A_n u_n = 0$, car $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(u_n A_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_{k+1} - u_k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(u_{k+1} - u_k)$.

Donc il existe $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n a_k u_k$, et on a $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k(u_{k+1} - u_k)$.

7) Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$. On applique 2) avec $u_n = n^{-\alpha}$ et $a_n = e^{in\theta}$ (pour $n \geq 1$).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante et converge vers 0. Il reste à prouver que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Or, on a $|A_n| = \left|\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\right| = \dfrac{\left|1 - e^{in\theta}\right|}{\left|1 - e^{i\theta}\right|} \leq \dfrac{2}{\left|1 - e^{i\theta}\right|}$. Donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

8) L'idée est de faire une transformation d'Abel (avec $R_n = L - A_n$ et $u_n = 1$). On peut refaire le calcul direct :
On a $\sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=1}^n k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=1}^n kR_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n$.

Ainsi, on a $\boxed{\sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n}$ $(*)$

- Supposons que $\sum n a_n$ converge.

On a $nR_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n a_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k$ qui tend vers 0 comme reste de la série $\sum n a_n$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} nR_n = 0$, et on en déduit (par $(*)$) que $\sum R_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

- Supposons que $\sum R_n$ converge. Alors $\sum_{k=0}^n k a_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} R_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} R_k$.

Comme les $k a_k$ sont positifs, on en déduit que $\sum n a_n$ converge. On peut alors appliquer ce qui précède et conclure.

Variante : $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $R_n = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$: cf cours. On en conclut que $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.