Opus 05. Intégrations par parties et transformations d'Abel

Rappel : f intégrable sur $[a,+\infty[$ ssi $\int_a^{+\infty} |f(t)|\ dt < +\infty$. Dans ce cas, $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est (absolument) convergente.

Avertissement (*selon le principe de précaution afin de prévénir une erreur fréquente et fatale*) : On ne peut pas prouver la convergence d'une intégrale par une simple majoration de $\left|\int_a^x g(t)\ dt\right|$: en effet, la primitive $G : x \longmapsto \int_a^x g(t)\ dt$ peut être majorée sur $[a,+\infty[$ sans converger en $+\infty$!!! (mais, si g est positive, G croît et converge ssi G est majorée).

Intégration par parties

Soient f et $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continues. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$.

1) On suppose $\begin{cases} F \text{ bornée} \\ g \text{ de classe } C^1\text{, décroissante et convergeant vers 0 en } +\infty \text{ (et donc positive)} \end{cases}$

a) Montrer que g' est intégrable sur $[a,+\infty[$.. En déduire que Fg' est intégrable sur $[a,+\infty[$.

b) Montrer que $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\ dt$ existe, c'est-à-dire qu'il existe $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)g(t)\ dt$.

2) Montrer que l'hypothèse F bornée est vérifiée notamment dans les deux cas suivants :

a) f est intégrable sur $[a,+\infty[$, c'est-à-dire $\int_a^{+\infty} |f(t)|\ dt < +\infty$.

b) f est périodique de période T et de moyenne nulle (on montrera d'abord que F est T-périodique).

Rappel : La valeur moyenne de f est la valeur moyenne de f sur tout segment $[x, x+T]$, c'est-à-dire $\frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)\ dt$.

3) Justifier que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^\alpha}\ dt$ existe.

4) (★) On suppose f est périodique de période T. Montrer que $\int_1^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\ dt$ existe ssi f est de moyenne nulle.

Indication : Poser $f(t) = m + g(t)$, où $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt$. Ainsi, g est T-périodique de moyenne nulle. Utiliser 2) b).

Transformation d'Abel

La transformation d'Abel est aux sommes ce que l'intégration par parties est aux intégrales.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On pose $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^n a_k}$.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=0}^n a_k u_k = u_n A_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(u_{k+1} - u_k)}$.

Indication : La preuve la plus élégante consiste à partir du terme $\sum_{k=0}^n a_k u_k$ et de l'écrire sous la forme : $\sum_{k=0}^n a_k u_k = \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1})u_k = \sum_{k=0}^n A_k u_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} u_k = ...$

6) *Régle d'Abel.*

On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, *décroissante et convergeant vers 0.*

En utilisant 5), montrer que la série $\sum a_n u_n$ converge.

Indication : Justifier que $\sum A_k(u_{k+1} - u_k)$ converge absolument.

7) Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$. Montrer que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

Remarque : Le cas est connu lorsque $\theta = \pi$, puisqu'il s'agit de la série de Riemann alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Remarque : En revanche, si $\theta = 0$ modulo 2π, la série converge ssi $\alpha > 1$.

8) Espérance d'une v.a. à valeurs sur $\mathbb{N}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels *positifs* telle que $\sum a_n$ converge.

On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Montrer que $\sum R_n$ converge ssi $\sum n a_n$ converge, et que dans ce cas, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n}$.

Indication : Montrer (par un calcul direct) que $\sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n$, et comparer nR_n et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k$.