Opus 04. Racines de polynômes. Corrigé abrégé.

Polynômes scindés à racines simples

1) On a $\deg P = n-1$ et le coefficient dominant de P vaut $2n$ (on utilise le binôme).

On a $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \dfrac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \dfrac{2}{i}\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = -2i\,\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Or, $P(z) = 0$ ssi $z \neq 1$ et $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

On en déduit que, pour $1 \leq k \leq n-1$, les $z_k = -2i\,\text{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ sont des racines de P.

Comme cotan décroît strictement sur $]0,\pi[$, elles sont distinctes. D'où $P(X) = 2n\prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k)$.

2) (*cf cours*) On résout $P(z) = P'(z) = 0$. On trouve qu'il n'y a aucune solution. D'où le résultat.

3) $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-\overline{j})$ divise le polynôme réel $P(X) = X^{2n} + X^n + 1$ ssi $P(j) = 0$.

Or, $P(j) = 3$ si $n \in 3\mathbb{N}$ et $P(j) = 0$ sinon. D'où la CNS : 3 divise n.

4) a) Les racines communes sont nécessairement parmi les z_k.

On suppose ici les $m_k \geq 1$. Le nombre de racines communes est donc $\sum_{k=1}^{r}(m_k - 1) = n - r$.

b) Il s'agit d'une question d'oral "classique". Posons $n = \deg P$.

P' divise P ssi P et P' admettent $(n-1)$ racines communes, donc ssi $r = 1$, avec les notations de a).

Exemple de transformations algébriques de polynômes complexes

5) a) Pour tenir compte des ordres de multiplicité, il faut mieux procéder à l'aide de la factorisation :

$P(X) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$, donc $Q(X) = P(X-\alpha) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X - (z_k + \alpha))$.

Donc les racines de Q sont les translatés de α des racines de P (avec les mêmes ordres de multiplicité).

b) *Terminologie* : $M(X) = a_n + a_{n-1}X + ... + a_1^{n-1}X + a_0^n X$ est appelé image miroir de $P(X)$.

On a $M(z) = a_n + a_{n-1}z + ... + a_0 z^n = z^n P(\frac{1}{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

En posant $P(X) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$, on a donc $M(z) = \lambda z^n \prod_{k=1}^{n}(\frac{1}{z} - z_k)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Comme $X(\frac{1}{X} - z_k) = (1 - z_k X)$, on en déduit $M(X) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(1 - z_k X)$.

Donc les racines de M sont les inverses des racines de P (avec les mêmes ordres de multiplicité).

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}$ est la somme des racines de $M(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ...$, donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k} = -\dfrac{a_1}{a_0}$.

6) a) Soit z une racine de P. On a alors $P(z^2) = P(z)P(z-1) = 0$.

Ainsi z^2, puis z^4, z^8,... sont racines de P. Ainsi, les $z^{(2^k)}$ sont racines de P pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Mais P admet un nombre fini de racines. Donc $z = 0$ ou $|z| = 1$ (sinon, les $z^{(2^k)}$ seraient distincts).

b) On a $P((1+z)^2) = P(1+z)P(z) = 0$. Donc $(1+z)^2$ est racine de P.

On ne peut pas avoir $z = 0$, car $1 = (1+0)^2$ serait racine, et donc $4 = (1+1)^2$ le serait.

Donc toute racine est de module 1. Donc $|z| = 1$ et aussi $|z+1| = 1$.

Donc z appartient à l'intersection des cercles de rayon 1 et de centres 0 et -1. Donc $z \in \{j, j^2\}$.

Remarque culturelle : Il suffit ensuite de faire la "synthèse".

En effet, $P \in \mathbb{C}[X]$ supposé non nul est de la forme $P(X) = \lambda(X-j)^n(X-j^2)^m$.

En réinjectant dans l'équation $P(X)P(X-1) = P(X^2)$, on obtient $\lambda = 1$ et $n = m$. On en conclut que les seuls polynômes non nuls vérifiant $P(X)P(X-1) = P(X^2)$ sont les $P(X) = (X^2+X+1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Majoration des racines

7) On a $|z|^n = \left|a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0\right| \leq |a_{n-1}|\,|z|^{n-1} + ... + |a_1|\,|z| + |a_0|$ par l'inégalité triangulaire.

Donc $|z|^n \leq m(|z|^{n-1} + ... + |z| + 1)$.

Si $|z| \leq 1$, l'inégalité demandée est immédiate. Sinon, $|z|^n \leq m\dfrac{|z|^n - 1}{|z|-1} \leq m\dfrac{|z|^n}{|z|-1}$, d'où $|z| \leq 1 + m$.

Racines réelles (d'un polynôme réel)

8) a) On a $P(-1) = -t < 0$, $P(0) = 1 > 0$, $P(1) = 2 - t < 0$ et $\lim_{+\infty} P_t = +\infty > 0$.

Par le TVI, P admet trois racines réelles α, β, γ vérifiant $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < \gamma$.

b) Par degré, ce sont les seules racines, et $\alpha + \beta + \gamma = t$ par les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé. Comme α et β appartiennent à $[-1, 1]$, alors $\gamma = t + O(1)$ lorsque $t \to +\infty$.

A fortiori, $\gamma(t) \sim t$ lorsque $t \to +\infty$.

9) a) (*cf cours*)

- Lorsque $p \geq 0$, P est strictement croissante et admet une unique racine réelle. On a bien $4p^3 + 27q^2 \geq 0$.

- Lorsque $p = -3a^2 < 0$, alors P' s'annule en $-a$ et $+a$.

Par un tableau de variations, P admet trois racines réelles distinctes ssi $P(-a)P(a) < 0$.

On obtient alors la CNS : $(-2a^3 + q)(2a^3 + q) < 0$, c'est-à-dire $4p^3 + 27q^2 < 0$.

b) Avec $\alpha = -\frac{1}{3}a$, on a $P(X) = Q(X - \alpha) = X^3 + pX + q$ car les termes en X^2 s'éliminent.

Or, Q admet 3 racines réelles distinctes ssi P admet 3 racines réelles distinctes. D'où la CNS du a).

10) On note que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $R^{(k)}(1) = R^{(k)}(-1) = 0$, car 1 et -1 racines de R d'ordre n.

On montre par récurrence (limitée) sur $k \in [\![0, n]\!]$, que $R^{(k)}$ admet k zéros sur $]-1, 1[$.

Il suffit en effet d'appliquer Rolle, sachant que pour $k < n$, 1 et -1 sont aussi des zéros de $R^{(k)}$.

Ainsi, $R^{(n)}$ admet n zéros sur $]-1,1[$.

Mais $R^{(n)}$ est la dérivée n-ième d'un polynôme de degré $2n$. Donc $\deg R^{(n)} = n$.

Ainsi, $R^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $]-1,1[$.

11) a) Notons a_1, a_2, ... , a_r les racines réelles de P sur $]0,1[$ d'ordre de multiplicité impair

Alors les seuls changements de signe de P sur $]0,1[$ interviennent en les racines a_k.

On peut donc prendre $Q = (X-a_1)...(X-a_r)$.

En effet, PQ est un polynôme dont toutes les racines sur $]0,1[$ sont d'ordre pair.

Donc PQ est de signe constant sur $[0,1]$.

b) On note que par linéarité de l'intégrale, on a $\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt = 0$ pour tout polynôme Q de degré $\leq n-1$.

On suppose par l'absurde que P admet r racines d'ordre impair sur $]0,1[$, avec $r < n$.

Avec les notations du a), PQ est un polynôme non nul de signe constant sur $]0,1[$, donc $\int_0^1 PQ \neq 0$.

Mais $\deg Q = r <, n$, d'où une contradiction avec $\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt = 0$

En conclusion, P admet au moins n racines d'ordre impair sur $]0,1($, donc a fortiori au moins n zéros.

Racines rationnelles (d'un polynôme à coefficients entiers)

12) a) On a $P(r) = 0$. En multipliant par q^n, on obtient $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$.

Comme q divise $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_{n-1}p^{n-1}q$, alors il divise donc a_np^n.

Comme p et q sont premiers entre eux, alors q divise a_n. On montre de même que p divise a_0.

b) Supposons $2^{1/n} = \dfrac{p}{q}$ rationnel (fraction irréductible). Alors $\dfrac{p}{q}$ racine de $X^n - 2$.

Donc q divise 1 et p divise 2, donc $2^{1/n} \in \{-2,-1,1,2\}$, ce qui est absurde.

Polynômes de plusieurs variables

13) L'idée est d'écrire $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(y)x^k$, où $Q_k(y) = \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l}y^l$.

Fixons $y \in]0,1[$. Le polynôme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} Q_k(y)x^k$ s'annule sur $]0,1[$ infini, donc est nul pour tout k.

Ainsi, pour tout $y \in]0,1[$, $Q_k(y) = 0$. Donc le polynôme Q_k est nul, c'est-à-dire $\forall l$, $a_{k,l} = 0$.