Opus 04. Racines de polynômes

Polynômes scindés à racines simples

1) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n = 2\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} X^{n-k}$.

2) Montrer que les racines complexes de $P(X) = X^5 - 5X + 1$ sont simples.

3) Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$ ssi n n'est pas un multiple de 3.

4) a) Soit $P = \prod_{k=1}^{r} (X - z_k)^{m_k} \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Montrer que P et P' admettent $(n-r)$ racines communes.
b) En déduire que P' divise P ssi P est de la forme $P(X) = \lambda(X - z)^n$.

Exemple de transformations algébriques de polynômes complexes

5) On considère $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$, de racines $z_1, ..., z_n$ (avec multiplicité).

a) Déterminer les racines du polynôme $Q(X) = P(X - \alpha)$?

b) On suppose $a_0 \neq 0$. Factoriser $M(X) = a_n + a_{n-1}X + ... + a_0 X^n$. *Indication* : Considérer $P(\frac{1}{z})$.

c) On suppose $a_0 \neq 0$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}$ en fonction des coefficients de P.

6) ($\bigstar$) Soit P un polynôme vérifiant $P(X)P(X-1) = P(X^2)$.
a) On note que si z est racine de P, alors z^2 l'est aussi. En déduire que $z = 0$ ou $|z| = 1$.
b) On note que si z est racine de P, alors $(1+z)^2$ l'est aussi. En déduire $z \in \{j, j^2\}$, où $j = e^{2i\pi/3}$.

Majoration des racines

7) Soit z une racine du polynôme unitaire $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

On pose $m = \sup_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$. Montrer que $|z|^n \leq |a_{n-1}|\,|z|^{n-1} + ... + |a_1|\,|z| + |a_0|$. En déduire que $|z| \leq 1 + m$.

Racines réelles (d'un polynôme réel)

8) Pour tout réel $t > 2$, on considère $P_t(X) = X^3 - tX^2 + 1$.

a) Montrer que P_t admet trois racines réelles α, β, γ vérifiant $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < \gamma$.

b) On note $\gamma = \gamma(t)$. Montrer que $\gamma(t) \sim t$ lorsque $t \to +\infty$.

9) a) Montrer que $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ admet trois racines réelles distinctes ssi $4p^3 + 27q^2 < 0$.

b) On considère $Q(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. En considérant $P(X) = Q(X - \alpha)$, expliquer comment choisir α pour déduire de a) une CNS pour que Q soit scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.

10) On pose $R = (X^2 - 1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. Montrer que $R^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $]-1, 1[$.

11) Soit P un polynôme réel. On note r le nombre de racines réelles d'ordre de multiplicité impair sur $]0, 1[$.

a) Trouver Q de degré r tel que PQ est de signe constant sur $[0, 1]$.

b) On suppose $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^1 P(t)t^k \, dt = 0$.

Montrer que P admet au moins n racines distinctes sur $]0, 1[$.

Racines rationnelles (d'un polynôme à coefficients entiers)

12) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Montrer que si le rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ (fraction irréductible) est racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $2^{1/n}$ est irrationnel. *Indication* : Utiliser a) avec $P(X) = X^n - 2$.

Polynômes de plusieurs variables

13) On considère $P(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq n} a_{k,l} x^k y^l$ un polynôme réel de deux variables de degré total $\leq n$.
On suppose que $\forall (x, y) \in]0, 1[^2$, $P(x, y) = 0$. Montrer que tous les $a_{k,l}$ sont nuls.