

Opus 04 bis. Dérivation discrète dans les polynômes

1) On considère l'endomorphisme $\delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par $\delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

a) On considère $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j = a_0 + \dots + a_n X^n$, avec $a_n \neq 0$.

Calculer $\delta(X^j)$. En déduire le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$. Préciser le noyau de δ .

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut donc définir l'endomorphisme $\delta_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ restriction de δ à $\mathbb{R}_n[X]$.

Expliciter la matrice de δ_n dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$.

d) Montrer que P est unique si on impose de plus $P(0) = 0$.

2) a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note R_p le polynôme tel que $R_p(X+1) - R_p(X) = X^p$ et $R_p(0) = 0$.

Préciser le degré et le coefficient dominant de R_p .

b) On pose $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$ la somme des puissances p -ième des entiers de 1 à n .

Par exemple, $S_0(n) = n$, $S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $S_2(n) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Montrer que $S_p(n)$ est un polynôme en n de degré $(p+1)$.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$.

Suggestion : Utiliser $\delta = \tau - \text{Id}$, où τ est l'opérateur de translation $\tau : P(X) \rightarrow P(X+1)$.

Exemple : Pour $n = 2$, on a $\delta^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.

b) Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p < n \\ n! & \text{si } p = n \end{cases}$

4) Formule de Taylor algébrique discrète

a) Justifier qu'il existe une unique suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $H_0 = 1$ et $\delta(H_{n+1}) = H_n$ et $H_{n+1}(0) = 0$.

Remarque culturelle : En fait, on peut montrer que $H_n = \frac{1}{n!} X(X-1)\dots(X-n+1)$.

b) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n(P)(0) H_n(X)$.

Remarque : La somme est finie car $\delta^n(P)$ est nul pour tout entier $n > \deg P$.

Opus 04 bis. Dérivation discrète dans les polynômes. Corrigé

1) a) On a $\delta(X^j) = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i = jX^{j-1} + \text{termes de degré } \leq j-2$.

On en déduit par linéarité que $\delta(P) = na_n X^{n-1} + \text{polynôme de degré } \leq n-2$.

En particulier, $\deg \delta(P) = \deg(P) - 1$. Ainsi, $\delta(P) = 0$ ssi $\deg P \leq 0$, donc $\text{Ker } \delta = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

b) La matrice est triangulaire supérieure stricte. Pour $i < j$, son coefficient d'indice (i, j) est $\binom{j}{i}$.

c) Il résulte de a) que $(\delta(X^n))_{n \geq 1}$ est une base de polynômes de degrés échelonnés.

Donc $\delta(\mathbb{R}[X]) = \text{Vect}(\delta(X^n))_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{R}[X]$.

d) Les solutions de l'équation linéaire $P(X+1) - P(X) = Q$ sont $P_0 + \text{Ker } \delta$, où P_0 est une solution particulière.

Comme $\text{Ker } \delta = \mathbb{R}_0[X]$ sev des polynômes constants, il y a unicité si on impose $P(0)$.

2) a) On a $\deg R_p = p$ et le coefficient dominant est $\frac{1}{p+1}$.

b) Par a), on a $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p = \sum_{k=1}^n (R_p(k) - R_p(k-1)) = R_p(n) - R_p(0) = R_p(n)$.

Donc $S_p(n)$ est bien un polynôme en n de degré $(p+1)$.

3) a) On a $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$.

Comme τ et Id commutent, alors par le binôme $\delta^n(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \tau^k$.

b) On prend $f(x) = X^p$. On a $\Delta^n(P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$.

Or, si $p < n$, $\Delta^n(P) = 0$ (par degré), et si $p < n$, et $\Delta^p(f) = p!$ (degré + coefficient dominant).

4) *Formule de Taylor algébrique discrète.*

a) Par 1) d), la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est entièrement définie par récurrence.

b) *Première méthode* : Par identification.

Posons $n = \deg P$. La famille $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est de degrés échelonnés, donc forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k H_k(X)$.

En itérant p fois par δ , on obtient $\delta^p(P)(0) = \sum_{k=p}^n \lambda_k H_{k-p}(X)$.

En prenant la valeur en 0, on obtient $\delta^p(P)(0) = \lambda_p H_0(0) = \lambda_p$.

Seconde méthode : Par récurrence sur $n = \deg P$.

On applique l'hypothèse de récurrence à $\delta(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^{n+1}(P)(0) H_n(X)$.

Par linéarité de δ , on a donc $\delta(P) = \delta(Q)$, où $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^{n+1}(P)(0) H_{n+1}(X)$.

Donc $P - Q \in \text{Ker } \delta$, donc $P - Q = \lambda$ constante. Comme $Q(0) = 0$, alors $\lambda = P(0)$.

Donc $P = P(0) + Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^n(P)(0) H_n(X)$.