Opus 03. Systèmes de numération. Corrigé

Ecriture en base b d'un entier naturel

1) (*existence*) On raisonne par récurrence sur p. La propriété est immédiate pour $p = 0$ et 1.

On considère la division euclidienne de n par b : on a $n = bq + r$, avec $0 \leq q < b^{p-1}$ et $0 \leq r < b$.

On applique l'hypothèse de récurrence à q. On a donc $q = \sum_{k=0}^{p-2} \varepsilon_k \ b^k$.

Donc $n = \sum_{k=0}^{p-2} \varepsilon_{k+1} \ b^{k+1} + r = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \ b^k$, en posant $\varepsilon_0 = r$.

(*unicité*) On peut exploiter l'unicité dans la division euclidienne et procéder par récurrence sur p.

En effet, on a nécessairement $\varepsilon_0 = n \bmod b = r$, et $q = \sum_{k=1}^{p-1} \varepsilon_k \ b^{k-1}$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à q, l'uplet $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{p-1})$ est unique, d'où le résultat.

Autre solution (conseillée) :

Supposons par l'absurde $N = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \ b^k = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon'_k \ b^k$, avec $(\varepsilon_k)_{0 \leq k < p}$ et $(\varepsilon'_n)_{0 \leq k < p}$ distincts.

Il existe donc $q = \max\{k \in [\![0, p-1]\!] \mid \varepsilon_k \neq \varepsilon'_k\}$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{q} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k) \ b^k = 0$.

On a alors $\left|\varepsilon_q - \varepsilon'_q\right| b^q = \left|\sum_{k=0}^{q-1} (\varepsilon_k - \varepsilon'_k) b^k\right| \leq \sum_{k=0}^{q-1} (b-1) b^k = b^q - 1$, ce qui contredit $\left|\varepsilon_q - \varepsilon'_q\right| \geq 1$.

2) (*existence*) Supposons $N < B_p = a_p B_{p-1}$.

Par la division euclidienne par B_{p-1}, on a $N = M + \varepsilon_{p-1} B_{p-1}$, avec $0 \leq M < B_{p-1}$ et $0 \leq \varepsilon_{p-1} < a_p$.

On conclut alors en démontrant la propriété par récurrence sur p et en appliquant l'hyp de rec à M.

(*unicité*) On procède comme au 1).

Exercice B. Écriture en base 2 d'un réel $x \in [0, 1[$

1) $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{p+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{p+1}} \dfrac{1}{1 - 1/2} = \dfrac{1}{2^p}$.

2) *Remarque* : Une idée est de construire $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ comme les chiffres de l'écriture en base 2 de l'entier $\lfloor 2^n x \rfloor$. Mais il faudrait alors justifier qu'on retrouve bien les mêmes chiffres lorsqu'on fait varier n.

On procède par récurrence. On veut avoir $y_n = \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{2} + \dfrac{y_{n+1}}{2}$ et $\varepsilon_{n+1} \in \{0, 1\}$ et $0 \leq y_{n+1} < 1$.

Il suffit donc de définir $y_0 = x$, et par récurrence, $y_{n+1} = 2y_n - \varepsilon_{n+1}$ avec $\varepsilon_{n+1} = \lfloor 2y_n \rfloor \in \{0, 1\}$.

La propriété $x = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon_k}{2^k} + \dfrac{y_n}{2^n}$ se déduit alors par récurrence immédiate.

3) Par pincement, on a $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{y_n}{2^n} = 0$, donc $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{2^n}$.

4) (*existence*) Il s'agit de prouver que si la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 1, on peut trouver une autre représentation définie par une suite non stationnaire en 1.

Supposons que $\varepsilon_n = 1$ pour tout $n > p$. Alors $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \varepsilon_n = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^p}$.

Il existe nécessairement p tel que $\varepsilon_p = 0$, car sinon, x vaudrait 1.

Donc il existe $p = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varepsilon_k = 0\}$. On a alors $\varepsilon_p = 0$ et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \varepsilon_n = \dfrac{1}{2^p}$.

Donc $x = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\varepsilon_p}{2^n} + \frac{1}{2^p}$.

Ainsi, on obtient l'écriture de x avec une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ non stationnaire en 1 (et stationnaire en 0).

(*unicité*) Supposons par l'absurde

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon'_n}{2^n}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\varepsilon'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites distinctes à valeurs dans $\{0,1\}$ et non stationnaires en 1.

Il existe un plus petit entier p tel que $\varepsilon_p \neq \varepsilon'_p$. Quitte à permuter, on peut supposer $\varepsilon_n = 0$ et $\varepsilon'_n = 1$.
On a donc $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} = \frac{1}{2^p} + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon'_n}{2^n}$.

Comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ non stationnaire en 1, alors $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} < \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^p}$. D'où contradiction.

Exercice C. Système de numération dans les réels

1) On a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = q^{n+1}\frac{1}{1-q} = q^n \frac{q}{1-q} \geq q^n$, car $q \geq 1-q$.

2) *Idée* : On construit les ε_n par récurrence, en appliquant la méthode “gloutonne” :

Si $0 \leq x \leq u_0$, on prend $\varepsilon_0 = 0$; sinon, on prend $\varepsilon_0 = 1$.

On itère alors le procédé avec $y = x - \varepsilon_0 u_0$, car $y \in [0, S']$, où $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

On définit donc $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence forte selon le schéma suivant :

Supposons $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1})$ définis de sorte à avoir la propriété

$$(\mathcal{P}_n) : 0 \leq R_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \quad , \quad \text{où } \boxed{R_n = x - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k u_k}$$

Si $R_n > u_n$, on prend $\varepsilon_n = 1$; sinon, on prend $\varepsilon_n = 0$.

Pour conclure, il s'agit de prouver que :

(i) $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) $x = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varepsilon_n$

Montrons (i) : La propriété est vraie pour $n = 0$, car on a $0 \leq x = R_0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$.

Supposons $(\mathcal{P}_n)$, avec $n \geq 1$. Montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$. On distingue les deux cas :

- si $0 \leq R_n \leq u_n$, alors $0 \leq R_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Avec $\varepsilon_n = 0$, on a donc bien $0 \leq R_n = R_{n+1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

- sinon, on a $u_n < R_n < u_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, donc $0 < R_{n+1} = R_n - u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, d'où (i).

Montrons (ii) : Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = 0$, alors par pincement, $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, donc $x = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varepsilon_n$.