Opus 03. Systèmes de numération

Exercice A. Écriture en base 2 (respectivement en base b) d'un entier naturel

Prop : Tout entier N vérifiant $0 \leq N < 2^p$ s'écrit de façon unique $N = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \, 2^k$, avec $\varepsilon_k \in \{0,1\}$.

Preuve :

L'*existence* se prouve par récurrence sur p en utilisant la division euclidienne de N par 2 :

On a $\boxed{N = 2q + r}$, avec $0 \leq q < 2^{p-1}$ et $r \in \{0,1\}$. On prend $\varepsilon_0 = r$.

On applique l'hypothèse de récurrence à q. On a donc $q = \sum_{k=0}^{p-2} \varepsilon_{k+1} \, 2^k$. D'où $N = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \, 2^k$.

L'*unicité* peut se prouver de plusieurs façons :

- Par un argument de cardinal : l'application $\{0,1\}^p \to [\![0, 2^p - 1]\!]$ $\;(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{p-1}) \longmapsto \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \, 2^k$ est surjective, et donc bijective car $\text{card}\{0,1\}^p = 2^p$.

- Directement : On suppose $\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \, 2^k = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon'_k \, 2^k$.

On montre $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$ par récurrence forte sur k en utilisant les égalités modulo 2.

Variante : On suppose par l'absurde $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{p-1}) \neq (\varepsilon'_0, ..., \varepsilon'_{p-1})$.

On considère $m = \max\{k \mid \varepsilon_k \neq 0\}$. On a alors $(\varepsilon_m - \varepsilon'_m) \, 2^m = \sum_{k=0}^{m-1} (\varepsilon'_k - \varepsilon_k) \; 2^k$.

On a $|\varepsilon_m - \varepsilon'_m| = 1$ et $|\varepsilon'_k - \varepsilon_k| \leq 1$, d'où une contradiction, car $2^m > \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1$.

Remarque : On en déduit alors que tout entier non nul N s'écrit de façon unique sous la forme

$$N = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \, 2^k \text{ , avec } p \in \mathbb{N}^* \text{ et } \varepsilon_k \in \{0,1\} \text{ et } \varepsilon_{p-1} \neq 0 \quad (\text{c'est-à-dire } \varepsilon_{p-1} = 1)$$

Pour le prouver, on montre qu'on a nécessairement $2^{p-1} \leq N < 2^p$, ce qui définit entièrement p.

On peut alors conclure en utilisant la propriété précédente.

1) Généralisation : Soit un entier naturel $b \geq 2$. On pose $[\![b]\!] = \{0, 1, ..., b-1\}$.

Montrer que tout entier N vérifiant $0 \leq N < b^p$, il existe un unique p-uplet $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{p-1})$ tel que

$$N = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \, b^k \text{ , avec } \varepsilon_k \in [\![b]\!] \text{ pour tout } k$$

2) Culturel : On peut généraliser les décompositions précédentes.

Considérons une suite d'entiers naturels $(a_n)_{n \geq 1}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 2$. On pose $B_n = a_1 ... a_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que tout entier $N \in [\![B_p]\!]$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$N = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k \; B_k, \text{ avec } \varepsilon_k \in [\![a_{k+1}]\!] \text{ pour tout } k$$

Exemple fondamental :

Tout entier vérifiant $0 \leq N < ab$ s'écrit de façon unique $N = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 a$, avec $0 \leq \varepsilon_0 < a$ et $0 \leq \varepsilon_1 < b$.

$\boxed{\textbf{Exercice A. Écriture en base 2 d'un réel } x \in [0,1[}$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$.

2) Soit $x \in [0,1[$. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k} + \frac{y_n}{2^n} \quad , \quad \text{où} \quad 0 \leq y_n < 1$$

3) Avec les notations de 2), montrer que $\boxed{x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{2^n}}$.

4) *Complément* (★)

On note Δ l'ensemble des suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ non stationnaire en 1.

Soit $x \in [0,1[$. On peut montrer qu'il existe une unique suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta$ telle que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{2^n}$.

Remarque : Plus généralement, étant donné un entier $b \geq 2$, tout réel $x \in [0,1[$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{b^n}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\![b]\!]$ et n'est pas stationnaire en $(b-1)$.

Remarque : Par exemple, en base 10, on a : 0.099999.... = 0.10000...

$\boxed{\textbf{Exercice B. Système de numération dans les réels} \ \ (\textit{oraux X et Centrale 2022})}$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positives telles que $\sum u_n$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

1) Soit $\dfrac{1}{2} \leq q < 1$. Montrer que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{F}$.

2) (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à $\mathcal{F}$. Soit $x \in [0,S]$, où $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

Remarque : On en déduit que l'ensemble des réels de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$ est le segment $[0,S]$.

$\boxed{\textbf{Exercice C. Système de numération sur } \mathbb{Z} \ \ (\textit{oral X 2020})}$

Montrer que tout entier $N \in \mathbb{Z}$ s'écrit de façon unique sous la forme $N = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k 3^k$, où $\varepsilon_k \in \{-1,0,1\}$.

Remarque : Pour que cette somme ait un sens, il faut considérer que $\varepsilon_k = 0$ pour k assez grand.

Solution : On a $-\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k 3^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\varepsilon_k) 3^k$ et on a $\varepsilon_k \in \{-1,0,1\}$ ssi $(-\varepsilon_k) \in \{-1,0,1\}$.
Il suffit donc de prouver la propriété pour $N \in \mathbb{N}$.

(*existence*) La propriété est immédiate pour $N = 0$.

$N \in \mathbb{N}^*$ s'écrit sous la forme $\varepsilon_0 + 3q$, avec $\varepsilon_0 \in \{-1, 0, 1\}$ et $q \in \mathbb{N}$.

On a $q \leq \frac{1}{3}(N+1) < N$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence forte à q.

(*unicité*) Supposons $\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k 3^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon'_k 3^k$. En raisonnant modulo 3, on obtient $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0$.

On simplifie alors chaque facteur et on divise par 3. On peut itérer le raisonnement.

Par récurrence forte, on en déduit que $\varepsilon_k = \varepsilon'_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.