Opus 03 ter. Sommes

1) Sommes télescopiques

a) $\sum_{n=p}^{q}(u_{n+1}-u_n)=u_{q+1}-u_p$.

Remarque : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{N\to+\infty}(u_{N+1}-u_0)=L-u_0$.

Exemples : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=1$ et $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=n+1$.

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+p)}=\dfrac{1}{p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+p}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+p}\right)=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{p}$.

2) Regroupements de termes

a) *Exemple : propriété de Fubini* : $\sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$.

Exemple : $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}a_{ij}=\sum_{0\leq i\leq j\leq n}a_{i,j}==\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}$.

b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k=\sum_{k\text{ pair}}a_k-\sum_{k\text{ impair}}a_k=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_{2j}-\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}a_{2j+1}$.

c) *Exemple (intégrales de Wallis)* : $\prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, car $\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n(n!)$.

Exemple : On admet $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. On pose $T=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

On a $A=\sum_{n\text{ pair}}\dfrac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k)^2}=\dfrac{1}{4}S$, donc $B=\sum_{n\text{ impair}}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{3}{4}S$ et $T=B-A=\dfrac{1}{2}S$.

3) Sommes géométriques

a) $\sum_{k=p}^{q}x^k$ vaut $x^p\,\dfrac{x^{q-p+1}-1}{x-1}$ si $x\neq 1$, et $(q-p+1)$ si $x=1$.

b) *Exemple* : Si $\theta\neq 0\ [2\pi]$, $\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)=\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\,\dfrac{e^{ni\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)=\operatorname{Re}\left(e^{in\theta/2}\,\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)=\cos((n+1)\theta/2)\,\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

Si $\theta=0$, on obtient n, qui est bien le prolongement par continuité en 0 de l'expression précédente.

c) *Exemple : sommes des puissances des racines de l'unité* :

On pose $\omega=e^{2i\pi/p}$. On a $U_p=\{1,\omega,...,\omega^{p-1}\}$. Ce sont les racines de X^p-1 sur $\mathbb{C}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{z\in U_p}z^n=\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^k)^n=\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k=\begin{cases}p & \text{si } \omega^n=1\text{, c'est-à-dire si } n \text{ multiple de } p\\ 0 & \text{sinon, car } (\omega^n)^p-1=\omega^{pn}-1=0\end{cases}$

4) Formule du binôme

a) Si x et y commutent, $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$.

Remarque : Faux dans $\mathcal{M}_n(K)$: $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA$.

b) *Exemple* : $\cos(n\theta)=\operatorname{Re}((\cos\theta+i\sin\theta)^n)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}i^k(\cos\theta)^{n-k}(\sin\theta)^k\right)$.

Donc $\cos(n\theta)=\sum_{k\text{ pair}}(-1)^{k/2}(\cos\theta)^{n-k}(\sin\theta)^k=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^j(\cos\theta)^{n-2j}(\sin\theta)^{2j}$.

5) Formules dérivées

On a $P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

a) *Exemple* : $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} = P'(1) = n2^{n-1}$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1)\binom{n}{k} = P''(1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Donc $\sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$.

Exemple : $\sum_{k=0}^n \dfrac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \int_0^1 (1-x)^n\ dx = \left[\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$.

b) *Exemple* : $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \dfrac{1}{2}\left(P(1)+P(-1)\right) = 2^{n-1}$ si $n \geq 1$ (et 1 si $n = 0$ car $0^0 = 1$).

Remarque : De même, $\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = \dfrac{1}{2}\left(P(1)-P(-1)\right)$.

Exemple : $\sum_{k \text{ multiple de } 3} \binom{n}{k} = \dfrac{1}{3}\left(P(1)+P(j)+P(j^2)\right)$, car $(1^k + j^k + j^{2k}) = 0$ si $k \notin 3\mathbb{N}$.

6) Distributivité

a) On développe un produit de n sommes en sommant tous les produits obtenus en prenant un et un seul terme dans chacun des n facteurs.

Exemple : $\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\left(\sum_{j=1}^p v_j\right)\left(\sum_{k=1}^q w_k\right) = \sum_{(i,j,k)}(u_i v_j w_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (u_i v_j w_k)$.

Exemple important : $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \sum_{i=1}^n {x_i}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$.

b) *Exemple* : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, car il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k facteurs où on prend x.

Exemple : $\prod_{i=1}^n (1+x_i) = \sum_{J\subset[\![1,n]\!]}\left(\prod_{i\in J} x_i\right)$: il y a 2^n termes dans la somme.

On a ainsi $(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+xz) + (xyz)$.

c) *Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé*

$(X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$

$(X-a)(X-b)(X-c) = X^2 - (a+b+c)X + (ab+ac+bc)X - abc$.

Cas général : Le coefficient en X^k de $\prod_{k=1}^n (X-a_k)$ est $(-1)^{n-k}\prod_{j_1<j_2<\ldots<j_k} a_{j_i}$.

En particulier, $\prod_{k=1}^n (X-a_k) = X^n - \left(\sum_{k=0}^n a_k\right)X^{n-1} + \left(\sum_{j<k} a_j a_k\right)X^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_1 \ldots a_n$.