Opus 03 bis. Combinatoire. Corrigé

1) $\boxed{N_{n,p} = n \times (n-1) \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$.

On peut rédiger de la façon suivante : pour construire $(x_1, ..., x_p)$, il y a n choix pour x_1, puis x_1 étant choisi, il y a $(n-1)$ choix pour x_2,, etc ...

2) On a $\mathcal{E}'_{n,p} = \mathcal{E}_{n-1,p}$.

D'autre part, l'application $A \longmapsto A \setminus \{n\}$ est une bijection de $\mathcal{E}''$ sur $\mathcal{E}'_{n-1,p-1}$.

Or, $\mathcal{E}_{n,p}$ est la réunion disjointe de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$.

Donc $\operatorname{card} \mathcal{E}_{n,p} = \operatorname{card} \mathcal{E}' + \operatorname{card} \mathcal{E}''$, c'est-à-dire $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

3) Il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$: c'est le nombre de n-uplets injectifs de $[\![1, n]\!]$.

On va compter le nombre de permutations d'une autre façonUne permutation σ de $E = [\![1, n]\!]$ est entièrement déterminée par (A, f), où A est l'ensemble des points fixes de σ et où $f : x \longmapsto \sigma(x)$ est le dérangement de $E \setminus A$ induit par σ.

A étant fixé, il y a $D_{n-\operatorname{card} A}$ choix pour f.

On en déduit

$$n! = \sum_{A \subset E} D_{n-\operatorname{card} A} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \subset E \text{ de card } k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

4) a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

b) Une partie A de cardinal $p+1$ dans $[\![1, n+1]\!]$ est entièrement déterminée par le couple (m, B), où $m = \max A$ et où $B = A \setminus \{m\}$ est une partie de $[\![1, m-1]\!]$ de cardinal p.
On obtient ainsi $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{m=1}^{n+1} \binom{m-1}{p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.En fait, on a toujours $m \geq p+1$.

5) $\boxed{M_{n,p} = \binom{n}{p}}$: il existe une unique façon de numéroter par ordre croissant des entiers.
Ainis, l'application $(x_1, .., x_p) \longmapsto \{x_1, ..., x_p\}$ est une bijection de l'ensemble des p-plets strictement croissants de $[\![1, n]\!]$ sur l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ de cardinal p.

Important : En revanche, il y a $p!$ numérotations possibles d'un ensemble de cardinal p,
donc $M_{n,p} = \dfrac{N}{p!}$, c'est-à-dire $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$.

b) On se ramène au cas des p-uplets $(x_1, ..., x_p)$ strictement croissants de $[\![1, n+p-1]\!]$ par la bijection

$f : (y_1, ..., y_p) \longmapsto (x_1, ..., x_p) = (y_1, y_2 + 1, ..., y_p + (p-1))$ qui est un p-uplet de $[\![1, n+p-1]\!]$.

On en déduit $M'_{n,p} = M_{n+p-1,p} = \binom{n+p-1}{p}$.

c) Une solution est d'associer bijectivement le $(p-1)$-uplet croissant $(x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + x_2 + ... + x_{p-1})$.

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des partitions de n et l'ensemble des $(p-1)$ uplet croissant de $[\![0, n]\!]$.
Donc $M''_{n,p} = M'_{n+1,p-1} = \binom{n+p-1}{p}$

Méthode directe : On considère le schéma :

$$\times \ \times \ \times \ | \ \times \ \times \ | \ \ | \ \times \ \times \ \times$$

avec n croix et $(p-1)$ barres.

Sur l'exemple, on a $n = 6$ et $p = 4$, on définit ainsi $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 3$.

On choisit les $\binom{n+p-1}{p-1}$ découpages possibles de l'ensemble (croix et barres) :

Les cardinaux des p blocs de $\times$ consécutifs définissent une partition de l'entier n.

6) Pour construire une n-partie de $[\![1, 2n]\!]$, on choisit k éléments dans $[\![1, n]\!]$ et $(n-k)$ éléments dans $[\![n+1, 2n]\!]$, avec $0 \leq k \leq n$. Donc $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Variante : Le coefficient en X^n de $(1+X)^n(1+X)^n$ vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$, donc il est égal à $\binom{2n}{n}$.

7) Chaque réel x_k appartient à (au moins) un intervalle $\left[\dfrac{r-1}{n}, \dfrac{r}{n}\right]$, avec $1 \leq r \leq n$.
On note $r(k)$ l'entier correspondant. Les $(n+1)$ entiers $r(k)$ appartiennent à $[\![1, n]\!]$.
Donc il y en a au moins deux d'égaux. A foritori, il existe deux réels dont l'écart est $\leq \frac{1}{n}$.

Autre preuve : On peut supposer $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq 1$.
Supposons par l'absurde $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k - x_{k-1} > \frac{1}{n}$.
Alors $x_n - x_0 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, ce qui contredit x_0 et $x_n \in [0, 1]$.

8) Les $(n+1)$ éléments $x_0, x_1, ..., x_n$ ne peuvent être tous distincts.
Il existe donc i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$ et $x_i = x_j$. Posons $p = j - i \in \mathbb{N}^*$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_i = x_{i+kp}$ par récurrence sur k (en composant p fois par f).
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique à partir du rang i.

Lorsque f est bijective, on obtient même $x_0 = x_p$ en composant i fois par f^{-1}.
Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p.

9) a) Les r_i, avec $0 \leq i \leq q$ appartiennent à $\{0, 1, ..., q-1\}$ donc ne peuvent être tous distincts.
Il existe donc i et j tels que $0 \leq i < j \leq q$ et $r_i = r_j$.
Or, 10^i est congru à r_i modulo q et 10^j est congru à r_j modulo q. Donc r_i et r_j sont congrus modulo q.
Autrement dit, q divise $10^i - 10^j$.

b) Avec les notations de a), on a $(10^i - 10^j) = qm$, donc $(10^i - 10^j)r = pm \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $10^i r$ et $10^j r$ admettent le même développement décimal après la virgule.
Mais leur développement est celui de r respectivement décalés de i et de j.
Donc le développement décimal de r est périodique de période $(j-i)$ à partir d'un certain rang.

Remarque : La réciproque est vraie :
Si x admet un développement décimal p-périodique à partir d'un certain rang, alors le réel $d = 10^p x - x$ est un décimal, donc $x = \dfrac{y}{10^p - 1} \in \mathbb{Q}$.
Ainsi, un nombre est rationnel ssi son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.