**Opus 03 bis. Combinatoire**

Deux outils majeurs en dénombrement :

- Établir une bijection entre l'ensemble étudiée et un ensemble dont on connaît le cardinal

- Partitionner en parties dont on sait calculer le cardinal.

Un cas particulier est le principe des bergers (partition en parties de même cardinal).

**1)** Déterminer le nombre $N_{n,p}$ de $p$-uplets $(x_1, ..., x_p)$ injectifs de $[\![1, n]\!]$ : $\quad x_k \in [\![1, n]\!]$ et $\forall i \neq j$, $x_i \neq x_j$.

**2)** On note $\mathcal{E}_{n,p}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, ..., n\}$ de cardinal $p$. On suppose $1 \leq p \leq n$.

On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des $A \in \mathcal{E}_{n,p}$ ne contenant pas $n$ et $\mathcal{E}''$ l'ensemble des $A \in \mathcal{E}_{n,p}$ contenant $n$.

Montrer la formule du triangle de Pascal : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

**3)** On appelle dérangement de $\{1, 2, ..., n\}$ toute permutation $\sigma$ de $\{1, 2, ..., n\}$ n'admettant aucun point fixe, c'est-à-dire $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

On note $D_n$ le nombre de dérangements de $\{1, 2, ..., n\}$. On pose $D_0 = 1$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$

*Remarque culturelle* : Ensuite, sachant inverser la matrice $A = (\binom{n}{k})_{0 \leq k \leq N, 0 \leq n \leq N}$, on peut calculer les $D_n$.

**4)** Montrer la relation ("crosse de hockey") : $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ $\qquad$ (qui est aussi $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p}$).

a) En utilisant la formule du triangle de Pascal : $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$.

b) En considérant $\max A = k + 1$ pour chaque $(p + 1)$-partie $A$ de $[\![1, n + 1]\!]$

**5)** Montrer la relation : $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ $\qquad$ (qui s'écrit aussi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$).

**6)** a) Montrer que le nombre $M_{n,p}$ de $p$-uplets $(x_1, ..., x_p)$ *strictement croissants* de $[\![1, n]\!]$ vaut $\binom{n}{p}$.

b) Montrer que le nombre $M'_{n,p}$ de $p$-uplets $(y_1, ..., y_p)$ *croissants* de $[\![1, n]\!]$ vaut $\binom{n+p-1}{p}$.

*Indication* : Utiliser l'application $f : (y_1, ..., y_p) \longmapsto (y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, ..., y_p + p - 1)$.

c) *Partition d'entiers* : Montrer que le nombre $M''_{n,p}$ de $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} x_i = n$ vaut $\binom{n+p-1}{p-1}$.

*Indication* : Utiliser l'application $g : (x_1, ..., x_p) \longmapsto (y_1, ..., y_{p-1}) = (x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + ... + x_{p-1})$.

**Principe des tiroirs**

*Principe* : Si $n$ objets sont rangés dans $p$ tiroirs, avec $n > p$, alors un tiroir contient au moins 2 objets.

**7)** Soient $n$ un entier naturel non nul, et $(n + 1)$ réels $x_0$, $x_1, ..., x_n$ appartenant à $[0, 1]$.

Montrer qu'il existe deux entiers $i$ et $j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ tels que $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq \dfrac{1}{n}$.

**8)** Soit $f : E \to E$, où $E$ est fini, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Que dire si $f$ est bijective (c'est-à-dire si $f$ est une permutation de $E$) ?

**9)** a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $0 \leq i < j \leq q$ tel que $q$ divise $10^i - 10^j$.

*Indication* : Considérer $r_i$ le reste modulo $q$ de $10^i$.

b) (★) En déduire que le développement décimal de $r = \frac{p}{q}$ est périodique à partir d'un certain rang. *Indication* : Utiliser le fait que $(10^i - 10^j)r$ est un entier naturel.