Opus 02. Principe de récurrence. Corrigé

1) a) On a $f(x+T)=f(x)$, donc par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on a $f(x+nT)=f(x)$.

On a alors $f(y)=f(y-nT)$, en prenant $x=y-nT$.

Donc $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+nT)=f(x)$.

b) - Il existe (α,β) $u^2(x)=\alpha u(x)+\beta x$, d'où $u^{n+2}(x)=\alpha u^{n+1}(x)+\beta u^n(x)$.

Par **récurrence d'ordre 2** sur $n\in\mathbb{N}$, on en déduit $\forall n\in\mathbb{N}$, $u^n(x)\in F$.

- Si $\beta\neq 0$, on a $u^{-1}(x)=\dfrac{1}{\beta}u(x)-\dfrac{\alpha}{\beta}x\in\text{Vect}(x,u(x))$, et ainsi $u^{-n-1}(x)=\alpha u^{-n+1}(x)+\beta u^{-n}(x)$.
Par récurrence d'ordre 2 sur $n\in\mathbb{N}$, on en déduit $\forall n\in\mathbb{N}$, $u^{-n}(x)\in F$.

Si $\beta=0$ et $\alpha\neq 0$, on a $u^{-1}(x)=\dfrac{1}{\alpha}x$, donc la propriété est immédiate.
Comme u est bijective, on ne peut pas avoir $\alpha=\beta=0$ que dans le cas $x=0$, qui est immédiat.

Méthode plus élégante : Posons $F=\text{Vect}(x,u(x))$. Par hypothèse, on a $u(F)\subset F$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u^n(F)\subset F$ par **récurrence** immédiate.

Comme u est bijective, $u(F)=F$, donc $u^{-1}(F)=F$, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u^{-n}(F)\subset F$. D'où $\forall n\in\mathbb{Z}$, $u(F)=F$.

2) On raisonne par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}^*$. L'entier 1 est produit de 0 nombres premiers.

Supposons $n\geq 2$ et que la propriété est vraie pour tout entier naturel $k\in[\![1,n-1]\!]$.

Si n est premier, la propriété est immédiate.

Sinon, $n=ab$, avec $1<a\leq b<n$, et on conclut en appliquant l'hyp de récurrence à a et à b.

3) On prouve par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$, avec $\deg P_n\leq n-1$.
On a en effet $P_{n+1}(x)=(1+x^2)P_n'(x)-2nxP_n(x)$.

On en déduit a fortiori que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)=0$.

Important : On utilise une propriété plus forte qui, elle, se prouve par récurrence.

Rappel : On a $\left(\dfrac{1}{g^\alpha}\right)'=\dfrac{-\alpha g'}{g^{\alpha+1}}$, donc $\left(\dfrac{f}{g^\alpha}\right)'=\left(f\times\dfrac{1}{g^\alpha}\right)'=\dfrac{f'}{g^\alpha}-\alpha\dfrac{g'}{g^{\alpha+1}}=\dfrac{f'g-\alpha fg'}{g^{\alpha+1}}$.

Remarque : On peut en déduire (par Rolle) que $f^{(n)}$, donc P_n admettent au moins $(n-1)$ racines réelles, et par degré, P_n **est donc scindé à racines simples sur** $\mathbb{R}$.

4) On suppose $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k u^k(x)=\overrightarrow{0}$. On veut prouver que tous les λ_k sont nuls.

a) On raisonne par **récurrence forte** (limitée) sur $k\in[\![0,n-1]\!]$.

En composant par u^{n-1}, on obtient $\lambda_0 u^{n-1}(x)+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$, donc $\lambda_0=0$ car $u^{n-1}(x)\neq\overrightarrow{0}$.

Supposons $1 \leq k < n-1$ et $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{k-1} = 0$.

En composant par u^{n-1-k}, on obtient $\lambda_k u^{n-1}(x) + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, car $u^n = 0$.

Comme $u^{n-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\lambda_k = 0$. Par récurrence forte, on a donc bien $\forall k,\ \lambda_k = 0$.

b) On raisonne **par l'absurde et on utilise la propriété de bon ordre.**

On suppose par l'absurde les λ_k non tous nuls.

Il existe alors $p = \min\{k \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$, car cet ensemble n'est pas vide.

En composant par u^{n-1-p}, on obtient $\lambda_p u^{p-1}(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui est absurde.

5) a) On montre par récurrence sur $k \leq p+1$ que y de classe C^k. On a bien y de classe C^0.

Si y est C^k, où $k \leq p$, alors y' est C^k, c'est-à-dire y de classe C^{k+1}.

b) On a $F' = f' \times F$.

Par la formule de Leibniz, on a donc $F^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} F^{(k)}$.

Par récurrence forte, on obtient donc $F^{(k)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) On a $F' = f' \times (g' \circ f)$.

On montre par récurrence forte la propriété (E_n) : Si u et v absolument monotones, alors $(u \circ v)^{(n)} \geq 0$.

La propriété est immédiate pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie au rang n.

On a $F^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} (g' \circ f)^{(k)}$.

Par hypothèse de forte appliquée à f et g', on a $(g' \circ f)^{(k)} \geq 0$. Donc $F^{(n+1)} \geq 0$.

6) a) On a $c_n = \dfrac{2n-1}{2n} \dfrac{2n-3}{2n-2} \dfrac{2n-5}{2n-4} \cdots \dfrac{1}{2} c_0 = \dfrac{(2n)!/2^n(n!)}{2^n(n!)} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

b) Par IPP, on a $W_{n+2} = \left[(\cos t)^{n-1}(\sin t)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-2}(\sin t)^2\, dt$.

Donc $W_{n+2} = (n-1)(W_n - W_{n+2})$, donc $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

Donc $W_{2m} = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n} W_0 = \dfrac{1}{4^{2m}}\binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2m+1} = \dfrac{1}{2m+1}\dfrac{4^{2m}(m!)^2}{(2m)!} W_1 = \dfrac{1}{2m+1}\dfrac{4^{2m}}{\binom{2m}{m}}$.

7) a) On a $(x_{n+1} - c) = a(x_n - c)$, avec $c = \frac{1}{1-a}$ point fixe de $h : x \longmapsto ax + b$.

Donc $x_n = c + a^n(x_0 - c)$, donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = c$.

b) Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k = 2u_n$. D'où $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n-1}$.

c) La division euclidienne par 2 s'écrit : $n = 2\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + r$, avec $r \in \{0, 1\}$.

v_n est le nombre de chiffres dans la décomposition de n en base 2.

Ainsi, $2^{v(n)-1} \leq n < 2^{v(n)}$, c'est-à-dire $v(n) - 1 \leq \log n < v(n)$, c'est-à-dire $v(n) = 1 + \lfloor \log n \rfloor$.

Variante : $2^{v(n)-1} < n+1 \leq 2^{v(n)}$, donc $v(n) = \lceil \log(n+1) \rceil$.