Opus 02. Principe de récurrence

Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: Les deux principes de $\mathbb{N}$ sont équivalents:

- **Propriété de bon ordre** : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

- **Schéma de récurrence** : Si $[\mathcal{P}(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

Montrons par exemple que la propriété de bon ordre implique le schéma de récurrence.

Supposons $\mathcal{P}(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est faux.
Il existe donc $m = \min A$ où $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n)$ est faux $\}$ partie non vide de $\mathbb{N}$.
On a nécessairement $m \geq 1$, car $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
Ainsi, $m-1 \in \mathbb{N}$. Comme $m-1 \notin A$, alors $\mathcal{P}(m-1)$ est vrai.
Or, on a $\mathcal{P}(m-1) \Rightarrow \mathcal{P}(m)$. Ce qui contredit $\mathcal{P}(m)$ faux (car $m \in A$). D'où une contradiction.

Raisonnements par récurrence

1) *Les deux questions sont indépendantes.*

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période T. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+nT) = f(x)$.

b) Soient $u \in GL(E)$ et $x \in E$ tels que $u^2(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x))$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u^n(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x))$.

Indication : Montrer la propriété pour $n \in \mathbb{N}$. Puis pour $n \in \mathbb{Z}^-$, se ramener au cas où $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : En fait, il y a une preuve plus directe en utilisant $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ et $u(F) = F$.

2) Montrer que tout entier $n \geq 1$ est produit de nombres premiers.

Remarque : De même, tout polynôme non nul de $K[X]$ est produit de polynômes irréductibles.

3) On considère $f(x) = \arctan(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

Important : Utiliser une propriété plus forte qui, elle, se prouve par récurrence.

Remarque : De façon analogue, pour prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan^{(n)}(x) \geq 0$, on montre par récurrence sur n que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$, où P_n est un polynôme à coefficients (entiers) positifs.

4) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un K-espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose $u^n = 0$ (endomorphisme nul) et $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq \overrightarrow{0}$. Montrer que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est libre.

On proposera **deux rédactions possibles** :

a) On suppose $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.

Montrer que $\lambda_k = 0$ par récurrence forte (et en composant par u^{n-1-k}).

b) Raisonner par l'absurde les λ_k non tous nuls et à considérer $p = \min\{k \mid \lambda_k \neq 0\}$.

5) a) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution d'une équation différentielle : $y' = f(y)$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On suppose f de classe C^p (resp. C^∞) Montrer que y est de classe C^{p+1} (resp. C^∞).

b) On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument monotone ssi f est C^∞ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

Montrer que si f est absolument monotone, alors $F = e^f$ l'est aussi.

Indication : Exploiter le fait que F vérifie l'équation différentielle $F' = f' \times F$.

c) (★) Montrer que si f et g sont absolument monotones, alors $F = g \circ f$ l'est aussi.

Indication : Utiliser : $F' = f' \times (g' \circ f)$. Appliquer l'hyp de rec à f et g' (et non pas à f et g).

Autrement dit, on prouve par récurrence : $\mathcal{P}(n) : \forall (f, g)$, ($f$ et g sont C^n) $\Rightarrow$ ($g \circ f$ est C^n).

Exemples de suites définies par récurrence

6) a) On considère $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \dfrac{2n-1}{2n} c_{n-1}$. Montrer que $c_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

b) *Intégrales de Wallis* : On considère $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

Montrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire une expression de W_n à l'aide de factorielles.

7) a) On considère $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1} = a x_n + b$, avec $|a| < 1$. Calculer x_n et $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

b) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer u_n.

c) On considère $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $v_n = 1 + v_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Calculer v_n.