Opus 01. Notions de logique

1) a) Soient $a \in \mathbb{R}$, α et $\varepsilon > 0$. Exprimer la négation formelle de $(\mathcal{P}) : \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

b) Soit A une partie de $[0, +\infty[$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < \varepsilon$

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x \leq \varepsilon$ Quelle est la propriété ainsi définie ? (utiliser $\inf A$).

Remarque : Ce type de propriétés est très courant en Analyse (majorations, limites, etc ...).

2) Soient $a, b, q \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'entier d divise à la fois les entiers a et b

(ii) l'entier d divise à la fois $(a - bq)$ et b

Important : Expliquer surtout pourquoi l'implication réciproque (ii) $\Rightarrow$ (i) se déduit directement de l'implication directe, en appliquant l'implication directe à des valeurs (a', b', q') bien choisies.

Remarque : On en déduit $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(a - bq, b)$: cf principe de l'algorithme d'Euclide.

Notion d'uniformité (plus précisement, notion de majoration uniforme par rapport à un paramètre)

3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les propriétés :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \leq M$

(ii) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \leq M$

Terminologie : Lorsque (ii) est vraie, on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.

Important : On ne peut pas permuter deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$ sans modifier le sens.
Dans le cas de (i), la valeur de M peut dépendre du paramètre n.

a) Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (i) et qui ne vérifie pas (ii).

b) Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (ii) et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas (ii).

Raisonnements par l'absurde (ou par contraposition)

4) Soient F et G deux sev. Montrer que $F \cup G$ est un sev ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

5) a) Soit un entier $n \geq 2$. Montrer que $2^{1/n}$, qui est racine réelle de $X^n - 2$, est irrationnel.

b) Par a), $\sqrt{2}$ est irrationnel. Montrer que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + r$ est irrationnel.

Raisonnements par condition nécessaire (analyse-synthèse)

6) a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que M s'écrit de façon unique $M = S + A$, avec S symétrique et A antisymétrique.

b) Résoudre dans $\mathcal{M}_n(K)$ l'équation $(E) : M + M^T = (\mathrm{tr}\, M)^2\ I_n$ d'inconnue M.

7) Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $(E) : y'(x) = y(\pi - x)$.

Indication : Utiliser une propriété remarquable de la transformation $s : x \longmapsto \pi - x$.

Notion d'existence et d'unicité

Commentaires :

◀ Dans les problèmes théoriques, on est généralement amené à séparer les preuves de l'existence et de l'unicité. Pour prouver l'unicité, on considère deux éléments vérifiant la propriété, et on montre qu'ils sont égaux. Mais dans de nombreux problèmes particuliers, on prouve souvent en même temps l'existence et l'unicité ou bien on explicite un élément qui vérifie la propriété et on prouve que tout élément vérifiant la propriété est nécessairement égal à cet élément.

◀ Il convient de distinguer deux types de preuve d'existence d'un élément x vérifiant $\mathcal{P}(x)$:

- On construit un élément x vérifiant la propriété (souvent la construction est délicate)

- On prouve une existence formelle : on ne peut pas ne pas avoir existence. Autrement dit, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe aucun élément x vérifiant $\mathcal{P}(x)$.

Ainsi, on montre par l'absurde (et le principe des tiroirs) qu'il existe au moins un chiffre $\alpha \in \{0, 1, ..., 9\}$ apparaissant une infinité de fois dans le développement décimal de $\pi = 3.1415926535...$, mais on ne sait pas expliciter α.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

5) On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Montrer que $h : t \longmapsto \dfrac{1+it}{1-it}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $U \setminus \{-1\}$. Expliciter h^{-1}.

Remarque : On pourra de plus noter un lien avec des formules de trigo (et la propriété de l'angle au centre).

Remarque : Plus généralement, l'homographie $h : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est bijective.

6) a) Montrer que pour tout $\lambda \in]0, e^{-1}]$, il existe un unique réel $x \geq e$ tel que $\ln x = \lambda x$.

b) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. Que dire si f est k-lipschitzienne où $k < 1$?

c) Soit $P(x) = x^n - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1})$, où les a_k sont des réels positifs non tous nuls.
Montrer qu'il existe un unique $\rho \in]0, +\infty[$ tel que $P(\rho) = 0$.

Indication : On peut étudier P (en procédant par récurrence). *Mais mieux* : Considérer $f : x \longmapsto x^{-n}P(x)$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme réel P tel que $P(X + 1) + P(X) = X^n$.

8) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe c tel que $f'(c) = 0$.

9) a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $B'_n = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.

b) Montrer que $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

Reformulation

14) (★) Caractériser les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

Suggestion géométrique : Considérer le centre G du triangle formé par les points A, B, C d'affixes e^{ix}, e^{iy}, e^{iz}.