

Exercice A. Retours à l'origine dans les marches aléatoires

Soit $d \in \mathbb{N}$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $E = \mathbb{Z}^d$.

On considère $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec en particulier $S_0 = 0$, où 0 désigne le vecteur nul de $\mathbb{Z}^d$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement $B_n = (S_n = 0)$ et on pose $g(n) = P(B_n)$. On a $g(0) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = (S_n = 0 \text{ et } S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0)$ et $f(n) = P(A_n)$.

Autrement dit, $f(n)$ est la probabilité de **premier retour** en $\vec{0}$ en n .

0) Exemples

a) On prend $d = 1$ et X_i de loi de Rademacher. Montrer que si $n = 2m$, $g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$.

b) (★) On prend $d = 2$ et $X_i = (Y_i, Z_i)$ de loi uniforme dans $\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$.

Montrer que les $Y_i + Z_i$ et $Y_i - Z_i$ sont indépendantes et de même loi de Rademacher.

En déduire que si $n = 2m$, $g(n) \sim \frac{1}{\pi m}$.

1) a) Justifier que $\sum g(n)t^n$ admet un rayon de convergence ≥ 1 .

On pose $\forall t \in]-1, 1[$, $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(n)t^n$.

b) Justifier que $F : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)t^n$ est bien définie et continue sur $[-1, 1]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_n | A_k)P(A_k)$.

3) Soit $1 \leq k \leq n$. Montrer avec soin que $P(B_n | A_k) = g(n - k)$.

4) Montrer que $\forall t \in [0, 1[$, $G(t) = 1 + G(t)F(t)$.

5) On note E l'événement : il existe un premier retour, c'est-à-dire $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 0$.

a) Justifier que $P(E) = F(1)$. En déduire que $P(E) = 1$ ssi $\lim_{t \rightarrow 1, t < 1} G(t) = +\infty$.

b) (★) Montrer que $P(E) = 1$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} g(n) = +\infty$.

6) a) On note $p(r, n) = P(A_n^{(r)})$ la probabilité d'un r -ième retour à l'origine à l'étape $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour r et $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer sans justification $p(r, n)$ en fonction des $p(r - 1, k)$ et des $f(j)$.

b) On note $p(E^{(r)})$ la probabilité d'un r -ième retour à l'origine. Montrer que $p(E^{(r)}) = F(1)^r$.

c) Montrer que si $F(1) = 1$, il y a presque sûrement une infinité de retours en 0.

Exercice B. Séries et intégrales de fonctions à plusieurs variables
--

1) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

On considère $F : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$ définie sur $D(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$.

Montrer que $\frac{\partial F}{\partial x}$ est définie et continue sur $D(R)$.

2) Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, où $K \subset \mathbb{R}^2$.

On suppose que $\sum \sup_K |f_n|$ converge.

On considère $\forall (x, y) \in K, S(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x, y)$. Montrer que S est continue.

3) Soit $f : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R} (t, x, y) \mapsto f(t, x, y)$ de classe C^1 .

On considère $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, J(x, y) = \int_0^1 f(t, x, y) dt$. Montrer que J est de classe C^1 .