

Interrogation n°22. Corrigé

Exercice A

1) a) Par le th spectral, il existe $V \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $V^T G V = D$.

On a de plus $\lambda_j > 0$ car $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(G) \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose $D_{1/2} = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.

Donc $S = V D_{1/2} V^T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a bien $S^2 = V D V^T = G$.

b) Par interpolation de Lagrange $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ en les λ_j , il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall j, P(\lambda_j) = \sqrt{\lambda_j}$.

On a alors $P(D) = D_{1/2}$, donc $P(G) = P(V D V^T) = V P(D) V^T = S$.

c) Il s'agit de prouver que $U = M S^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. On a $U^T U = (S^{-1})^T M^T M S^{-1}$.

Comme $M^T M = S^2$ et que $(S^{-1})^T = (S^T)^{-1} = S^{-1}$, on obtient $U^T U = I_n$, c'est-à-dire $U \in O_n(\mathbb{R})$.

d) Idée : $G = S^2$ et S commutent, donc les sev propres E_λ de G sont stables par S .

En se plaçant sur E_λ , on se ramène au cas $S^2 = \lambda I$. On a alors $\text{Sp}(S) = \{\lambda\}$ donc $S = \sqrt{\lambda} I$.

On obtient ainsi comme unique solution S défini par $Sx = \sqrt{\lambda}x$ pour $x \in E_\lambda$.

2) a) Par bilinéarité, $\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} = X^T A Y$.

b) Donc $a_{ij} = \omega(e_i, e_j) = -\omega(e_j, e_i) = -a_{ji}$. Donc A est antisymétrique.

Soit $y \in \text{Ker } A$ non nul. On a donc $\forall x \in E, x^T A y = 0$, ce qui contredit $\exists x \in E, x^T A y \neq 0$.

Donc $\text{Ker } A = \{0\}$, c'est-à-dire A inversible.

c) On a $A^T = -A$, donc $\det A = (-1)^n \det A$. Comme $\det A$ est non nul, alors $(-1)^n = 1$, c'est-à-dire n pair.

3) a) Comme A est inversible, F est globalement invariante par A , c'est-à-dire $A(F) = F$.

Donc $\forall y \in F, x^T A y = 0$ ssi $x \in F^\perp$, c'est-à-dire $x \in F^\omega$ ssi $x \in F^\perp$.

Remarque : De façon générale, $F^\omega = A(F)^\perp$. On a donc $\dim F^\omega = n - \dim A(F) = n - \dim F$.

b) On considère $\tilde{\omega}$ la restriction de ω à $F \times F$. Par 2) c), il suffit de prouver que $\tilde{\omega}$ est symplectique.

Il est évident que $\tilde{\omega}$ est bilinéaire antisymétrique.

Soit $y \in F$ non nul. Supposons par l'absurde que $\forall x \in F, \tilde{\omega}(x, y) = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in F, \omega(x, y) = 0$.

Par a), on a aussi $\forall x \in F^\omega, \omega(x, y) = 0$. Comme $F \oplus F^\omega = E$, alors par linéarité, $\forall x \in E, \omega(x, y) = 0$.

Ce qui contredit ω symplectique. Donc $\forall y \in F$ non nul, $\exists x \in F, \tilde{\omega}(x, y) \neq 0$.

Autre preuve : En se plaçant dans une BON adaptée à $F \oplus F^\perp$, on a A orthosemblable à une matrice de la forme

$\left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & * \end{array} \right)$, et cette matrice qui est de la forme $U^T A U$ est antisymétrique, donc B est antisymétrique ce qui

permet de lui appliquer 2) c).

4) a) On a pour tout $(x, y) \in E \times E, \omega(Mx, My) = \omega(x, y)$, c'est-à-dire $x^T M^T A M y = x^T A y$.

En prenant $x = e_i$ et $y = e_j$, on obtient $(M^T A M)_{ij} = (A)_{ij}$, c'est-à-dire $M^T A M = A$.

b) Comme $M^T A M = A$ et que A est inversible, alors $(\det M)^2 = 1$, donc M inversible.

On a $\omega(M^{-1}x, M^{-1}y) = \omega(M M^{-1}x, M M^{-1}y) = \omega(x, y)$, donc $M^{-1} \in \Delta_n$.

c) Si M et $N \in \Delta_n$, alors $\omega(MNy, MNy) = \omega(Nx, Ny) = \omega(x, y)$, donc $MN \in \Delta_n$.

5) a) On sait que $(\det S)^2 = 1$, et comme $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det S = \lambda_1 \dots \lambda_n > 0$, donc $\det S = 1$.

b) - Supposons $S \in \Delta_n$, c'est-à-dire $SAS = A$.

Soient $\lambda > 0$ et $x \in E_\lambda$. On a $SASx = Ax$, donc $\lambda SAx = Ax$, donc $Ax \in E_{1/\lambda}$.

On en déduit que $A(E_\lambda) \subset E_{1/\lambda}$. Comme A est bijective, $\dim E_\lambda \leq \dim E_{1/\lambda}$.

Mais en considérant $1/\lambda$, on a de même $\dim E_{1/\lambda} \leq \dim E_\lambda$. Donc $\dim E_\lambda = \dim E_{1/\lambda}$. Et ainsi $A(E_\lambda) = E_{1/\lambda}$.

- Réciproquement, supposons $\forall \lambda > 0, A(E_\lambda) = E_{1/\lambda}$.

On a donc $SASx = Ax$ pour tout $x \in E_\lambda$. Par le th spectral, $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(S)} E_\lambda = \mathbb{R}^n$.

Comme SAS et A sont linéaires, on a donc $SASx = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc $SAS = A$.

6) a) On a $U^T AU = A$, donc $AU = UA$.

Ainsi, A et U commutent, donc le sev propre F est stable par A . Par 3) b), $\dim F$ est pair.

b) Le sev propre F est stable par U . Comme U est une matrice orthogonale, on sait que $F^\perp$ est stable par U .

En considérant la matrice d'isométrie associée à U dans une BON adaptée à $F \oplus F^\perp$, on obtient U orthosemblable

à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_m & O \\ \hline O & V \end{array} \right)$.

Comme V est la matrice dans une BON d'une isométrie (de $F^\perp$), alors $V \in O_{n-m}(\mathbb{R})$.

Les seules valeurs propres réelles possibles de V sont 1 et -1 . Par définition de F , -1 n'est pas valeur propre de V (car il n'y a pas de vecteur propre dans $F^\perp$). Donc V n'a pas de valeur propre réelle négative.

Donc $\det V \geq 0$: en effet, les racines non réelles de χ_V sont 2 à 2 conjuguées.

D'où $\det V = 1$, car $\det V \in \{-1, 1\}$. Donc $\det U = (-1)^m \det V = 1$.

Exercice B1

1) ϕ est linéaire en dimension finie donc est continue.

Autre solution : Les normes sont équivalentes. La convergence des polynômes correspond à la convergence par coefficients. Donc $P(X) \mapsto P(z)$ est continue (comme combinaison linéaire de fonctions continues).

2) a) - Supposons $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ scindé sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)$.

Donc $|P(z)| \geq \prod_{k=1}^n |z - \lambda_k| \geq |\text{Im } z|^n$, car $|z - \lambda_k| \geq |\text{Im}(z - \lambda_k)| = |\text{Im } z|$.

- Réciproquement, supposons $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im } z|^n$.

Alors $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, P(z) \neq 0$. Or, P est scindé sur $\mathbb{C}$. Donc sur $\mathbb{R}$, car toutes ses racines sont réelles.

b) Par a), $G_z = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid |P(z)| \geq |\text{Im } z|^n\}$ est une partie fermée comme image réciproque d'un fermé par la fonction continue $P(X) \mapsto |P(z)|$.

Donc $F_n = E_n \cap \left(\bigcap_{z \in \mathbb{C}} G_z \right)$ est un fermé comme intersection (arbitraire) de fermés.

Remarque : On aussi prouver le résultat en montrant que F_n est stable par passage à la limite.

3) On note $x_1 < \dots < x_n$ les racines (simples) de P .

On choisit $y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_n < y_n$.

Comme $P'(x_k) \neq 0$, alors P change de signe en chaque x_k . Donc le signe de $P(y_k)$ alterne.

De plus, $\lim_{+\infty} P = +\infty$. Donc $P(y_n) > 0$, et ainsi $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(-1)^{n-k} P(y_k) > 0$.

4) a) Par le théorème des accroissements finis appliqué à $\lambda \mapsto F(x, \lambda)$, on a

$$|F(x, \lambda) - F(x, \lambda_0)| \leq |\lambda - \lambda_0| \sup_{\mu \in [\lambda, \lambda_0]} \left| \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \mu) \right|.$$

Donc $M = \sup_{(x, \mu) \in [y_0, y_n] \times [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1]} \left| \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \mu) \right|$ convient (M existe car $[y_0, y_n] \times [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1]$ est un compact).

b) On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq 1$ et $M\varepsilon < \min_{0 \leq k \leq n} |P_{\lambda_0}(y_k)|$, par exemple $\varepsilon = \min \left(1, \frac{1}{2M} \min_{0 \leq k \leq n} |P_{\lambda_0}(y_k)| \right)$.

On a alors $|P_\lambda(y_k) - P_{\lambda_0}(y_k)| < |P_{\lambda_0}(y_k)|$, donc $P_\lambda(y_k)$ et $P_{\lambda_0}(y_k)$ ont même signe.

On a donc bien $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(-1)^{n-k} P_\lambda(y_k) > 0$.

c) Soit $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$. Par b) et le TVI, P_λ s'annule sur tout $]y_{k-1}, y_k[$, où $1 \leq k \leq n$.

Comme les $]y_{k-1}, y_k[$ sont disjoints, P_λ admet (au moins) n racines.

Par degré, ce sont les seules et elles sont simples, c'est-à-dire $P_\lambda(X) \in \Delta_n$.

d) On a $P_\lambda(x_k(\lambda)) = \sum_{j=0}^n a_j(\lambda) x_k(\lambda)^j$, c'est-à-dire $F(x_k(\lambda), \lambda) = 0$.

En dérivant par rapport à λ , on a donc $x'_k(\lambda) \frac{\partial F}{\partial x}(x_k(\lambda), \lambda) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_k(\lambda), \lambda) = 0$.

Or, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = P'_\lambda(x)$ et $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^n a'_j(\lambda) x_k(\lambda)^j = Q_\lambda(x)$.

Comme $P'_\lambda(x_k(\lambda))$ n'est pas nul (racine simple), alors $x'_k(\lambda) = -\frac{Q_\lambda(x_k(\lambda))}{P'_\lambda(x_k(\lambda))}$.

e) Si $x_k(\lambda_0) \neq 0$, alors x_k est de signe constant non nul au voisinage de λ_0 .

- Ainsi, si aucun des $x_k(\lambda_0)$ n'est nul, la fonction N est constante au voisinage de λ_0 .

- Supposons désormais qu'il existe k tel que $x_k(\lambda_0) = 0$.

Par d), $x'_k(\lambda_0) = -\frac{Q_{\lambda_0}(x_k(\lambda_0))}{P'_{\lambda_0}(x_k(\lambda_0))} = -\frac{Q_{\lambda_0}(0)}{P'_{\lambda_0}(0)} = -\frac{a'_0(\lambda_0)}{a_1(\lambda_0)} > 0$.

Donc au voisinage de λ_0 , $x_k(\lambda) < 0$ pour $\lambda < \lambda_0$ et $x_k(\lambda) \geq 0$ pour $\lambda \geq \lambda_0$.

On en déduit qu'en λ_0 , $N(\lambda)$ augmente d'une unité en passant par la valeur $\lambda = \lambda_0$. D'où le résultat.

Exercice B2

1) a) L'inégalité est évidente en distinguant les cas $|x| \leq 1$ et $|x| \geq 1$.

X^n est d'espérance finie donc $E(|X^n|) < +\infty$. Or, on a $|X^k| \leq 1 + |X^n|$.

Comme $1 + |X^n|$ est d'espérance finie, alors par comparaison, X^k est d'espérance finie.

b) e^{itX} est d'espérance finie car $|e^{itX}| \leq 1$.

Par transfert, on a $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(itx_n)$. Posons $g_n(t) = a_n \exp(itx_n)$.

On a g_n de classe C^p et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $g_n^{(k)}(t) = a_n (ix_n)^k \exp(itx_n)$.

On a $|g_n^{(k)}(t)| \leq a_n |x_n|^k$.

- Les séries $\sum g_n^{(k)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ (en fait normalement).

- La série $\sum g_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, car $\sup_{t \in \mathbb{R}} |g_n^{(p)}(t)| = a_n |x_n|^p$.

Donc ϕ_X est de classe C^n , et on a $\phi^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (ix_n)^p = i^p E(X^p)$.

c) Supposons X symétrique. Alors $\exp(itX)$ et $\exp(-itX)$ ont même loi.

Donc a fortiori $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\phi_X(t) = \phi_X(-t)}$, c'est-à-dire ϕ_X paire.

Par le théorème du transfert, on a $\phi_X(t) = \sum_{x \in E} P(X = x) e^{itx}$, où $E = \text{Im } X$.

Donc $\phi_X(-t) = \sum_{x \in E} P(X = x) e^{-itx} = \overline{\phi_X(t)} \in \mathbb{R}$. Donc $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Variante : $2\phi_X(t) = E(e^{itX} + e^{-itX}) = 2E(\cos(tX)) \in \mathbb{R}$.

2) a) On considère l'opérateur de dérivation D sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On note $\varphi_k : t \mapsto \exp(i\lambda_k t)$. On a $D(\varphi_k) = i\lambda_k \varphi_k$.

Ainsi, les φ_k sont des valeurs propres de D associés à des valeurs propres distinctes.

Donc $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre. Or, $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = 0$. Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_k = 0$.

Variante : On dérive n fois la relation $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) = 0$, et on prend la valeur en $t = 0$.

On obtient ainsi $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sum_{k=1}^n (\lambda_k)^j \alpha_k = 0$. Il s'agit d'un système linéaire homogène de Van der Monde, inversible car les λ_k sont distincts. Donc les α_k sont nuls.

b) Quitte à ajouter des valeurs, on prend X à valeurs dans $\{-x_n, \dots, -x_1, x_0, x_1, \dots, x_n\}$, avec $x_0 = 0$.

Supposons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)}$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=-n}^n a_k e^{itx_k} = \sum_{k=-n}^n a_k e^{-itx_k}$, où $a_k = P(X = x_k)$.

On a donc $\sum_{k=-n}^n a_k e^{itx_k} = \sum_{k=-n}^n a_{-k} e^{itx_k}$, donc $\sum_{k=-n}^n (a_k - a_{-k}) e^{itx_k} = 0$.

On déduit de 2) que $\forall k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $a_k - a_{-k} = 0$. Ainsi, X est symétrique.

c) Supposons $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Comme $a_n = \overline{a_n}$, alors $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\phi_X(t)} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(t) e^{int} dt = a_{-n}$.

3) a) On a $\phi_X(h) = \phi_X(0) + h\phi'_X(0) + \frac{h^2}{2}\phi''_X(0) + o(h^2)$.

D'où, par calcul, $f(h) = \frac{-4h^2\phi''_X(0) + o(h^2)}{4h^2} = -\phi''_X(0) + o(1)$, donc $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(h) = -\phi''_X(0)$.

b) On a pour tout $h > 0$, $f(h) = E\left(\frac{2 - 2e^{i2hX}}{4h^2}\right) = E\left(\frac{\sin(hX)^2}{h^2}\right)$.

Par transfert, on a donc $f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

c) Posons $g_n(h) = a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$. On a $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} g_n(h) = a_n(x_n)^2$.

On va prouver que $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} g_n(h)$.

On ne pas utiliser le th de la double limite : on a $\sup_{h > 0} g_n(h) = a_n x_n^2$, mais on ne sait pas si $\sum a_n x_n^2$ converge, car c'est justement ce que l'on veut prouver ...

En fait, on utilise la positivité des g_n : on a $\sum_{n=0}^N a_n x_n^2 = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{n=0}^N g_n(h)$.

Comme $\sum_{n=0}^N g_n(h) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(h)$, alors $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \sum_{n=0}^N g_n(h) \leq \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(h) = -\phi_X(0)$.

Donc $\sum_{n=0}^N a_n x_n^2 \leq -\phi_X(0)$. Par le th de la limite monotone, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^2 < +\infty$, donc X^2 d'espérance finie.