

Exercice A. Matrices symplectiques (15 points)

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $(X | Y) = X^T Y$.

Décomposition polaire

- 1) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $G = M^T M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- a) [1 pt] Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = G$.
- b) [1 pt] Montrer qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S = P(G)$.
- c) [1 pt] Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M = US$.
- d) *Question supplémentaire hors-interrogation.* Montrer que S est unique.

Formes bilinéaires symplectiques

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON d'un espace euclidien E .

Une forme **symplectique** sur E est une forme bilinéaire $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \omega(x, y)$ telle que :

- $\forall (x, y) \in E \times E, \omega(y, x) = -\omega(x, y)$, c'est-à-dire ω antisymétrique
- $\forall y \in E \setminus \{\vec{0}\}, \exists x \in E, \omega(x, y) \neq 0$

Pour $x \in E$, on pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}} x$. Dans la suite, on identifie x et X , et ainsi E s'identifie à $\mathbb{R}^n$ muni du psc.

- 2) a) [0.5 pt] On pose $A = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\omega(x, y) = x^T A y$.
- b) [1 pt] Montrer que A est **antisymétrique** (c'est-à-dire $A^T = -A$) et que A est **inversible**.
- c) [0.5 pt] En déduire que n est pair.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de E **stable** par A , c'est-à-dire $A(F) \subset F$.

- a) [1 pt] On considère le sev $F^\omega = \{x \in E \mid \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$. Montrer que $F^\omega = F^\perp$.
- b) [2 pts] Montrer que $\dim F$ est pair. *Indication* : Considérer la restriction $\tilde{\omega}$ de ω à $F \times F$

Matrices symplectiques

4) On note Σ_n l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in E \times E, \omega(Mx, My) = \omega(x, y)$.

- a) [1 pt] Montrer que $M^T A M = A$.
- b) [0.5 pt] Montrer que si $M \in \Sigma_n$, alors $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in \Sigma_n$.
- c) [0.5 pt] Montrer que si M et $N \in \Sigma_n$, alors $MN \in \Sigma_n$.

5) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note E_λ le sev propre de S associé à la valeur propre λ .

- a) [0.5 pt] Montrer que si $S \in \Sigma_n$, alors $\det S = 1$.
- b) [2 pts] Montrer que $S \in \Sigma_n$ ssi $\forall \lambda > 0, A(E_\lambda) = E_{1/\lambda}$.

6) Soit $U \in O_n(\mathbb{R}) \cap \Sigma_n$. On considère $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ux = -x\}$ et on pose $m = \dim F$.

- a) [1 pt] Montrer que m est pair.
- b) [1.5 pt] (★) Montrer que $\det U = 1$.

Indication : Justifier d'abord que U est orthosemblable à $\left(\begin{array}{c|c} -I_m & O \\ \hline O & V \end{array} \right)$, avec $V \in O_{n-m}(\mathbb{R})$.

Exercice B1. Polynômes réels scindés

 (10 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note E_n l'ensemble des polynômes réels $P(X)$ de degré n et **unitaires** (le coefficient en x^n vaut 1).

On vérifie aisément (*admis ici*) que E_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note F_n l'ensemble des polynômes $P(X) \in E_n$ qui sont scindés (sur $\mathbb{R}$).

On note Δ_n l'ensemble des polynômes $P(X) \in E_n$ qui sont scindés (sur $\mathbb{R}$) et à racines simples.

1) [0.5 pt] Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que l'application $\phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \quad P(X) \mapsto P(z)$ est continue.

2) a) [2 pts] Soit $P(X) \in E_n$. Montrer que $P(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$.

b) [1 pt] En déduire que F_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) [0.5 pt] Soit $P(X) \in \Delta_n$ un polynôme **unitaire de degré n scindé à racines simples**.

Montrer qu'il existe des réels $y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n$ tels que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (-1)^{n-k} P(y_k) > 0$.

4) On considère un polynôme $P_\lambda(X) \in E_n$ paramétré par un réel λ , et on pose

$$P_\lambda(X) = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(\lambda) X^j = \sum_{j=0}^n a_j(\lambda) X^j, \text{ avec } a_n(\lambda) = 1$$

On suppose de plus que les fonctions $\lambda \mapsto a_j(\lambda)$ sont de classe C^∞ .

Ainsi la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, \lambda) \mapsto P_\lambda(x)$ est de classe C^∞ .

a) [1.5 pt] Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et $[y_0, y_n] \subset \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\forall x \in [y_0, y_n], \forall \lambda \in [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1], \quad |P_\lambda(x) - P_{\lambda_0}(x)| \leq M |\lambda - \lambda_0|$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [y_0, y_n], \forall \lambda \in [\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1], \quad |F(x, \lambda) - F(x, \lambda_0)| \leq M |\lambda - \lambda_0|$$

b) [1.5 pt] Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $\boxed{P_{\lambda_0}(X) \in \Delta_n}$.

On reprend les notations de 3) et 4) a). Expliciter un réel $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon], \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (-1)^{n-k} P_\lambda(y_k) > 0$$

c) [0.5 pt] On garde les notations de la question précédente.

Montrer que pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, $P_\lambda(X) \in \Delta_n$.

d) [1 pt] Pour $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, on note $x_1(\lambda) < \dots < x_n(\lambda)$ les racines de $P_\lambda(X)$.

On *admet* que les fonctions $x_k : \lambda \mapsto x_k(\lambda)$ sont de classe C^1 sur $] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [$.

On pose $Q_\lambda(X) = \sum_{j=0}^{n-1} a'_j(\lambda) X^j$. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \lambda \in] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [, \quad x'_k(\lambda) = -\frac{Q_\lambda(x_k(\lambda))}{P'_\lambda(x_k(\lambda))}$.

e) [1.5 pt] (★) On suppose que $a'_0(\lambda_0) a_1(\lambda_0) < 0$.

Pour $\lambda \in] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [,$ on note $N(\lambda) = \operatorname{card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid x_k(\lambda) \geq 0\}$ le nombre de racines positives de P_λ .

Montrer que la fonction $\lambda \mapsto N(\lambda)$ est croissante au voisinage de λ_0 .

Exercice B2. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

(9.5 points)

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose $\text{Im } X \subset \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on pose $a_n = P(X = x_n)$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = E(e^{itX})$.

On dit que X est symétrique si X et $-X$ ont même loi.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose X^p d'espérance finie.

a) [1 pt] Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^k \leq 1 + |x|^p$. En déduire que X^k est d'espérance finie.

b) [1.5 pt] Montrer que ϕ_X est de classe C^p et exprimer $\phi_X^{(p)}(0)$ de façon simple.

c) [1 pt] Montrer que si X est symétrique, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on s'intéresse aux réciproques de b) et c).

2) a) [1 pt] Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels distincts, et des réels α_k . On note $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \exp(i\lambda_k t)$.

On suppose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) = 0$. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_k = 0$.

b) [1 pt] On suppose ici que X prend un nombre fini de valeurs.

Montrer la réciproque de 1) c) : si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, alors X est symétrique.

c) [1 pt] On suppose ici que X à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On montre (*admis*) que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(t) e^{-int} dt$.

Montrer la réciproque de 1) c) : si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, alors X est symétrique.

3) On suppose ϕ_X de classe C^2 . On va démontrer que X est de moment d'ordre 2 fini.

a) [1 pt] On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\forall h > 0$, $f(h) = \frac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$.

Déterminer la limite de f en 0^+ .

b) [1 pt] Montrer que pour tout $h > 0$, $f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

c) [1.5 pt] (★) En déduire la réciproque de 1) b) : X est de moment d'ordre 2 fini.

Complément (entraînement). Matrices à coefficients DSE (inspiré de X MP 2023)

Pour $R > 0$, on note $\mathcal{E}(R)$ l'ensemble des fonctions DSE sur $] - R, R[$ et à valeurs réelles, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f :] - R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ et pour lesquelles il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in] - R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ appartenant à $\mathcal{E}(R)$ et pour $0 < r < R$, on pose $\|f\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$.

1) a) Justifier (en deux ou trois lignes) que $\mathcal{E}(R)$ est un sev de $C^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$.

b) Soit $0 < r < R$. Montrer que $\|\cdot\|_r$ est une norme sur $\mathcal{E}(R)$, et que $\|fg\|_r \leq \|f\|_r \|g\|_r$.

2) Soit $0 < r < R$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{E}(R)$, et que $\sum \|f_n\|_r$ converge.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $] - r, r[$ vers une fonction f .

b) Montrer que $f \in \mathcal{E}(r)$ et que la série $\sum f_n$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_r$.

Indication : Utiliser les familles sommables et le théorème de Fubini.

3) Soient $R > 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{E}(R)$ telle que $f(0) = 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel positif q tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq q^n$.

b) On définit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = -\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$. Montrer que $|b_n| \leq (2q)^n$.

c) Montrer que la fonction $g = \frac{1}{f}$ est définie et DSE au voisinage de 0.

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On sait (admis ici) que $N(A) = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour $R > 0$, on note $\mathcal{M}(R)$ les fonctions $M :] - R, R[\rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, M_{ij} \in \mathcal{E}(R)$.

Autrement dit, il s'agit des fonctions à valeurs matricielles dont les coefficients M_{ij} sont DSE sur $] - R, R[$.

Pour $0 < r < R$ et $M \in \mathcal{M}(R)$, on pose $|||M|||_r = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r$.

On vérifie (admis ici) que $M \mapsto |||M|||_r$ est une norme (appelée norme triple) sur le sev $\mathcal{M}(R)$.

a) Soient M et $N \in \mathcal{M}(R)$. Pour $x \in] - R, R[$, on pose $(MN)(x) = M(x)N(x)$.

Soit $0 < r < R$. Montrer que $MN \in \mathcal{M}(R)$ et que $|||MN|||_r \leq |||M|||_r |||N|||_r$.

b) Soit $M \in \mathcal{M}(R)$ et $0 < r < R$. On suppose $|||M|||_r < 1$.

Soit $x \in] - r, r[$. Montrer que la série de matrices $\sum M(x)^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

et que la matrice $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} M(x)^n$ est l'inverse de la matrice $I_p - M(x)$.

c) Avec les notations de b), montrer que $N \in \mathcal{M}(r)$.

Corrigé

1) a) On sait que toute application DSE sur $] - R, R[$ est de classe C^∞ sur $] - R, R[$.

D'autre part, une combinaison linéaire de fonctions DSE sur $] - R, R[$ est aussi DSE.

De plus, l'application nulle appartient à $\mathcal{E}(R)$. Donc $\mathcal{E}(R)$ est bien un sev de $C^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$.

b) Soient $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ appartenant à $\mathcal{E}(R)$.

On a $\|f\|_r \geq 0$. Supposons $\|f\|_r = 0$. Comme $r > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$, donc $f = 0$.

On a $\|f + g\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| r^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) r^n = \|f\|_r + \|g\|_r$.

Enfin, $\|\lambda f\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| r^n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = |\lambda| \|f\|_r$. Donc $f \mapsto \|f\|_r$ est une norme.

C'est aussi une norme d'algèbre :

Par produit de Cauchy, $\|fg\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}| r^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| r^n = \|f\|_r \|g\|_r$.

2) a) On a $\sup_{]-r, r[} |f_n| \leq \sup_{x \in]-r, r[} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |x|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = \|f_n\|_r$.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $] -r, r[$, donc simplement, et on pose $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

b) Montrons d'abord que $f \in \mathcal{E}(r)$. Posons $\forall x \in]-r, r[$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} x^k$.

La famille $(a_{n,k} x^n)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k} x^k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k}| r^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_r < +\infty$.

Donc par Fubini, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} x^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} x^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}) x^k$.

Ainsi, f est bien DSE sur $] -r, r[$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(r)$.

On a $\|f - \sum_{k=0}^n f_k\|_r = \|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\|_r \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_r \rightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $\sum f_n$ converge vers f pour $\|\cdot\|_r$.

3) a) Comme $a_0 = 1$, il suffit d'avoir $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq q^n$.

Pour $0 < \rho < R$. $\sum |a_n| \rho^n$ converge, donc $(|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par un réel M .

On a ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq M \left(\frac{1}{\rho}\right)^n$. On peut donc prendre $q = \frac{1}{\rho} \max(1, M)$.

b) On raisonne par récurrence forte. On a $b_0 = 1 \leq (2q)^0$. Supposons $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $|b_k| \leq (2q)^k$.

Alors $|b_n| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_{n-k}| \leq (2q)^n \sum_{k=1}^n 2^{-k} \leq (2q)^n \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = (2q)^n$.

c) f est continue en 0 et $f(0) = 1$, donc f ne s'annule pas sur le voisinage $] -\alpha, \alpha[$ de 0.

Par b), la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est de rayon $R' \geq \frac{1}{2q}$, et par produit de Cauchy, on a :

$\forall x \in]-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q}[$, $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) x^n = a_0 b_0 + 0 = 1$.

On a donc g DSE sur $] -r, r[$, où $r = \min(\alpha, \frac{1}{2q})$, et $\forall x \in]-r, r[$, $g(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n)$.

4) a) Posons $P = MN$. On a $\forall (i, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $P_{ik} = \sum_{j=1}^p M_{ij} N_{jk}$.

Comme les fonctions M_{ij} et N_{jk} appartiennent à $\mathcal{E}(R)$, alors par 1), la fonction P_{ik} appartient à $\mathcal{E}(R)$.

Et on a donc $\|P_{ik}\|_r \leq \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r \|N_{jk}\|_r$.

D'où $\sum_{k=1}^p \|P_{ik}\|_r \leq \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r \|N_{jk}\|_r = \sum_{j=1}^p (\|M_{ij}\|_r \sum_{k=1}^p \|N_{jk}\|_r) \leq \sum_{j=1}^p \|M_{ij}\|_r \|N\|_r$.

Donc $\sum_{k=1}^p \|P_{ik}\|_r \leq \|M\|_r \|N\|_r$. Comme i est arbitraire, on en déduit que $\|P\|_r \leq \|M\|_r \|N\|_r$.

b) On a notamment $\|M_{ij}\|_r \leq \|M\|_r$. On a donc $\|(M^n)_{ij}\|_r \leq \|M^n\|_r \leq \|M\|_r^n$ par a).

Donc les séries $\sum (M^n)_{ij}$ convergent au sens de 2), car la série $\sum \|(M^n)_{ij}\|_r$ converge.

Donc la série $\sum (M^n(x))_{ij}$ converge..

Ainsi, la série de matrices $\sum M(x)^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, par convergence des suites des coefficients.

On pose $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} M(x)^n$. Pour $|x| < r$, on a $(\sum_{k=0}^n M(x)^k)(I_p - M(x)) = I_p - M(x)^{n+1}$.

Comme $\left| M(x)_{ij}^{n+1} \right| \leq \|(M^{n+1})_{ij}\|_r \leq \|M^{n+1}\|_r \rightarrow 0$, alors par passage à la limite.

Remarque : Au lieu de raisonner par coefficients, on pourrait aussi utiliser $N(M(x)) \leq \|M\|_r$.

c) Chaque coefficient $N_{ij}(x)$ est somme d'une série de fonctions qui convergent pour $\|M\|_r$ dans $\mathcal{E}(r)$

En effet, $N_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (M^n)_{ij}(x)$.

Et on peut appliquer 2) car $\sum_{n=0}^{+\infty} \|(M^n)_{ij}\|_r \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|M^n\|_r \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|M\|_r^n < +\infty$.