

Interrogation n°21. Corrigé

Exercice A

On peut supposer $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. On pose $x_0 = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = P(X = x_k)$.

Pour $t \in [x_{k-1}, x_k[$, $P(X > t) = \sum_{j=k}^n a_k$ et pour $t \in [x_n, +\infty[$, $P(X > t) = 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} P(X > t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\sum_{j=k}^n a_k \right) dt = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \left(\sum_{j=k}^n a_k \right)$.

Donc $\int_0^{+\infty} P(X > t) dt = \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{j=k}^n a_k \right) - \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{j=k+1}^n a_k \right)$, car $x_0 = 0$.

On obtient bien $\int_0^{+\infty} P(X > t) dt = \sum_{k=1}^n x_k a_k = E(X)$.

Remarque : Dans le cas où les x_k sont entiers naturels, on retrouve $E(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} P(X > m)$.

Exercice B

1) a) $|P(X \in A) - P(Y \in A)| = E(|1_{X \in A} - 1_{Y \in A}|)$.

Lorsque $X = Y$, on a $(X \in A \text{ et } Y \in A)$ ou bien $(X \notin A \text{ et } Y \notin A)$, donc $|1_{X \in A} - 1_{Y \in A}| = 0$.

On en déduit $|1_{X \in A} - 1_{Y \in A}| \leq 1_{X \neq Y}$, donc $|P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq E(1_{X \neq Y}) = P(X \neq Y)$.

b) $\sum_{n \in A} |P(X = n) - P(Y = n)| = \sum_{n \in A} P(X = n) - P(Y = n) = P(X \in A) - P(Y \in A)$.

Par a), on a donc $\sum_{n \in A} |P(X = n) - P(Y = n)| \leq P(X \neq Y)$.

De même, $\sum_{n \in B} |P(X = n) - P(Y = n)| = P(X \in B) - P(Y \in B) \leq P(X \neq Y)$ par a).

En sommant, on obtient bien $\delta(X, Y) \leq 2P(X \neq Y)$.

2) a) On a $\forall t \in [-1, 1]$, $G_{T_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{Y_{k,n}}(t) = \prod_{k=1}^n e^{(t-1)p_{k,n}} = e^{(t-1)p}$.

Deux séries entières coïncidant sur $[-1, 1]$ ont les mêmes coefficients, donc T_n suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

b) $(S_n \neq T_n) \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} (X_{k,n} \neq Y_{k,n})$

Donc par sous-additivité, $P(S_n \neq T_n) \leq \sum_{k=1}^n P((X_{k,n} \neq Y_{k,n}) \leq \sum_{k=1}^n p_{k,n}^2$.

c) Par 1) et b), $\delta(S_n, T_n) \leq 2P(S_n \neq T_n) \leq 2 \sum_{k=1}^n p_{k,n}^2$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On prend $p_{k,n} = \frac{\lambda}{n}$ (pour n assez grand de sorte que $p_{k,n} \leq 1$).

On a $\sum_{k=1}^n p_{k,n} = \lambda$ et $\sum_{k=1}^n p_{k,n}^2 = \frac{\lambda^2}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. La loi de S_n est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

On a donc $\sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{p^k}{k!} e^{-p} \right| = \sum_{k=0}^n |P(S_n = k) - P(T_n = k)| \leq \delta(S_n, T_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

3) a) $p - pe^{-p} = p(1 - e^{-p}) \leq p^2$, car $e^{-p} \geq 1 - p$ par convexité de $\exp$.

b) Lorsque Y est de loi $P(p)$, on a $P(Y = 0) = e^{-p} \geq 1 - p$ et $P(Y = 1) = pe^{-p} \leq p$.

On construit donc Y tel que $(X = 0) \subset (Y = 0)$ et $(Y = 1) \subset (X = 1)$.

On a alors $P(X = Y) = 1 - p + pe^{-p}$, donc $P(X \neq Y) = p - pe^{-p} \leq p^2$ par a).

Exercice C

1) On a bien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ forme bilinéaire symétrique positive.

Supposons $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $\forall t \in [-1, 1]$, $f(t)^2 = 0$.

Deux séries entières qui coïncident sur $[-1, 1]$ sont égales, donc f est bien nulle sur $\mathbb{R}$.

2) On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) a) On a pour $j \leq n$, $\langle B_j, f - Q_n \rangle = \langle B_j, f \rangle - \sum_{k=0}^n \langle B_k, f \rangle \delta_{jk} = 0$.

Donc $f - Q_n \in \text{Vect}(B_0, \dots, B_n)^\perp = \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

Par Pythagore, on a $\|f\|^2 = \|f - Q_n\|^2 + \|Q_n\|^2$, et on conclut avec $\|Q_n\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle B_k, f \rangle^2$.

b) Q_n est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\|f - P\|^2 = \|f - Q_n\|^2 + \|Q_n - P\|^2 \geq \|f - Q_n\|^2$.

4) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sup_{[-1,1]} |f - P| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq \deg P$, on a $\|f - Q_n\|^2 \leq \|f - P\|^2 = 2\varepsilon^2$.

Comme ε est arbitraire, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - Q_n\|^2 = 0$, donc par 2) a), $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle B_n, f \rangle^2 = \|f\|^2$.

5) On a $\langle u(f), g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} ((x^2 - 1)f'(x)) g(x) dx$.

Par une IPP, on a $\langle u(f), g \rangle = [(x^2 - 1)f'(x)g(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x^2 - 1)f'(x)g'(x) dx$.

Il s'agit donc d'une expression symétrique en f et g , donc $\langle u(f), g \rangle = \langle f, u(g) \rangle$, c'est-à-dire u symétrique.

6) a) On considère la matrice de u_n dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$.

Or, on a $u(X^k) = k(k+1)X^k - (k-1)(k-2)X^{k-2}$, avec $(k-1)(k-2)X^{k-2} = 0$ si $k \in \{0, 1\}$.

La matrice de u_n dans $\mathcal{C}$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $k(k+1)$, avec $0 \leq k \leq n$.

Donc les valeurs propres de u_n sont $\{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

b) Par le théorème spectral, u_n est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par a), il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ vecteur propre de u_n de valeur propre $\lambda_n = n(n+1)$.

Comme λ_n n'est pas valeur propre de u_{n-1} , alors $\deg B_n = n$.

Comme u est symétrique, les sev propres de u sont deux à deux orthogonaux.

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc orthormée car les λ_n sont distincts. Et c'est une base (cf degrés échelonnés).

7) a) Lorsque $\lambda \in \{2k(2k+1), n \in \mathbb{N}\}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}x^{2k}$ est un polynôme donc $R = +\infty$.

Si non, pour $x \neq 0$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}} = x^2$, donc $\sum a_{2k}x^{2k}$ est de rayon $\sqrt{1} = 1$.

b) On considère l'équation $u(f) = \lambda f$ dans E .

On cherche donc les fonctions $f \in E$ qui vérifient $u(f) = \lambda f$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On a $u(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_n X^n - n(n-1)a_n X^{n-2}$.

On a $u(f) = \lambda f$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n$.

Il résulte de b) que les seules solutions qui sont DSE sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes.

Donc $\text{Sp}(u) = \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque : On pourrait montrer que pour tout autre réel λ , l'équation $u(f) = \lambda f$ admet des solutions qui sont DSE sur $] -1, 1[$, non continues sur $] -1, 1[$ mais intégrables sur $] -1, 1[$.

Cela provient en effet du fait que $\frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}} = 1 - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, d'où $a_{2k} \sim \frac{\alpha}{k}$, donc $\sum a_{2k}$ diverge.