

Interrogation n°21. Barème sur 24 pts

Exercice A. Expression intégrale de l'espérance (extrait Centrale MP 2018) (3 pts)

Soit $X : \Omega \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ une variable aléatoire finie réelle positive, c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \geq 0$.

Montrer que $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt$.

Exercice B. Théorème des événements rares

1) a) [2 pts] Montrer que pour toutes variables aléatoires entières $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, on a :

$$\forall A \subset \mathbb{N}, \quad |P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq P(X \neq Y)$$

Indication : Il est conseillé de faire intervenir la variable $1_{X \in A} - 1_{Y \in A}$.

b) [2 pts] On pose $\delta(X, Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} |P(X = n) - P(Y = n)|$, appelée distance de X à Y . Montrer que

$$\delta(X, Y) \leq 2P(X \neq Y)$$

Indication : On pourra considérer $A = \{n \in \mathbb{N}, P(X = n) \geq P(Y = n)\}$ et $B = \mathbb{N} \setminus A$.

2) Soit un réel $\lambda \geq 0$. Soit $(p_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ une famille de réels dans $[0, 1]$ telle que

$$\left(\text{pour } n \text{ assez grand, } \sum_{k=1}^n p_{k,n} = \lambda \right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n p_{k,n}^2 = 0$$

Soit $(X_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ une famille de v.a. entières indépendantes, avec $X_{k,n}$ de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_{k,n})$.

On admet qu'il existe des variables aléatoires $Y_{k,n}$ indépendantes telles que, pour tous $1 \leq k \leq n$,

$$Y_{k,n} \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(p_{k,n}) \quad \text{et} \quad P(X_{k,n} \neq Y_{k,n}) \leq p_{k,n}^2$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_{k,n}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n Y_{k,n}$.

a) [1 pt] Préciser, pour n assez grand, la loi de T_n , en redémontrant la propriété du cours utilisée.

b) [1.5 pt] Montrer que $P(S_n \neq T_n) \leq \sum_{k=1}^n p_{k,n}^2$.

c) [2 pts] En déduire le théorème des événements rares : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(S_n, T_n) = 0$.

Et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| = 0$.

3) On se propose de prouver partiellement la propriété admise au 2).

Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in [0, 1]$.

a) [0.5 pt] Montrer que $p - pe^{-p} \leq p^2$.

b) [1.5 pt] Construire une variable aléatoire Y de loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$ telle que $P(X \neq Y) \leq p^2$.

Exercice C. Exemple d'endomorphisme symétrique

On note E l'espace vectoriel des fonctions qui sont DSE sur $\mathbb{R}$. On considère $\mathbb{R}[X]$ comme un sev de E .

Rappel : Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est DSE sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1) [1.5 pt] Pour $(f, g) \in E^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

Justifier brièvement que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Partie I

2) [1 pt] Montrer qu'il existe une base orthonormée $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg B_n = n$.

3) Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = \sum_{k=0}^n \langle B_k, f \rangle B_k$.

a) [1 pt] Montrer que $f - Q_n \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ et que $\|f - Q_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n \langle B_k, f \rangle^2$.

b) [0.5 pt] Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\|f - Q_n\|^2 \leq \|f - P\|^2$.

4) [1.5 pt] On admet le théorème de Stone-Weierstrass :

pour tout $f \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sup_{[-1,1]} |f - P| \leq \varepsilon$.

Montrer que $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle B_n, f \rangle^2$.

Partie II

On considère $u : E \rightarrow E$ définie par $u(f)(x) = \frac{d}{dx} ((x^2 - 1)f'(x))$.

5) [1 pt] Montrer que u est symétrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

6) [2.5 pts] On vérifie (*admis ici*) que si P est un polynôme, $u(P)$ est un polynôme et $\deg u(P) \leq \deg P$.

a) Déterminer les valeurs propres de la restriction u_n de u à $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer qu'il existe une BON $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ composée de vecteurs propres de u , telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg B_n = n$.

7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

a) [1 pt] On suppose $a_0 \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_{2k} x^{2k}$.

On distinguera des cas selon la valeur de λ .

Les résultats sont analogues pour $\sum a_{2k+1} x^{2k}$.

b) [0.5 pt] En déduire $\text{Sp}(u)$.