

Interrogation n°20 bis. Corrigé

Exercice

1) On a $P(A) = \prod_{k=1}^m (A - \lambda_k I_n)$. Donc $\det P(A) = \prod_{k=1}^m \det(A - \lambda_k I_n)$.

Donc $P(A)$ est inversible ssi $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\det(A - \lambda_k I_n) \neq 0$, donc ssi $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\lambda_k \notin \text{Sp}(A)$.

Ainsi, $P(A)$ est inversible ssi $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cap \text{Sp}(A) = \emptyset$.

2) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe $Z \neq \vec{0}$ tel que $AZ = \lambda Z$. On a $P(A)Z = P(\lambda)Z$, donc $P(\lambda)Z = \vec{0}$.

Comme Z n'est pas nul, alors $P(\lambda) = 0$.

3) Supposons (i). Alors le polynôme scindé à racines simples $\pi(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$ annule A .

Comme π est scindé à racines simples, alors π n'a pas de racines dans $\text{Sp}(A)$, donc $\pi(A)$ inversible.

Remarque : Le raisonnement fonctionne pour tout polynôme P scindé à racines simples qui annule A , car les valeurs propres de A sont nécessairement des racines de P .

Réciproquement, supposons (ii) : il existe $P \in \mathbb{C}(X)$ tel que $P(A) = O_n$ et $P'(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Notons Δ l'ensemble des racines de P .

Par ii), toute valeur propre de A est racine de P . Donc π divise P . On a donc $P = \pi Q$.

D'autre part, aucune racine λ de Q n'est valeur propre de A , car sinon, λ serait racine multiple de P , donc on aurait $P'(\lambda) = 0$, ce qui contredit $P'(A)$ inversible.

On en déduit par (i) que $Q(A)$ est inversible. Comme $P(A) = \pi(A)Q(A) = O_n$, alors $\pi(A) = O_n$.

Donc le polynôme scindé à racines simples π annule A , et A est donc diagonalisable.

Problème

1) On a $L(z^k) = O(|z|^k)$ et comme $\sum |z|^k$ converge, alors $\sum L(z^k)$ converge absolument.

2) On a : $\left(\prod_{k=0}^N \frac{1}{1 - z^k} \right) = \exp \left(\sum_{k=0}^N L(z^k) \right)$.

Par passage à la limite et par continuité de $\exp$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^N \frac{1}{1 - z^k}$ existe et vaut $\exp \left(\sum_{k=0}^{+\infty} L(z^k) \right)$.

3) a) Si $\sum_{k=1}^N kp_k = n$, on a $0 \leq p_k \leq \frac{n}{k} \leq n$. Donc a fortiori $a_N(n) \leq (n+1)^N$.

Ainsi, $a_N(n) = O(n^N)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_N(n) x^n$ admet un rayon de convergence $R \geq 1$.

b) Lorsque $(p_1, \dots, p_N) \in E_N(n)$, on a nécessairement $p_N \leq \frac{n}{N}$, c'est-à-dire $p_N \leq \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$.

Pour construire une suite $(p_1, \dots, p_N) \in E_N(n)$, on choisit donc pour p_N un entier $q \leq \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$, puis une famille $(p_1, \dots, p_{N-1})$ telle que $\sum_{k=1}^{N-1} kp_k = n - qN$.

On en déduit une bijection entre $E_N(n)$ et l'union disjointe des $E_{N-1}(n - qN)$, où $0 \leq q \leq \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor$.

Donc $a_N(n) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n - qN)$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\forall |x| < 1$, $f_N(x) = f_{N-1}(x) \frac{1}{1 - x^N}$.

On a $\frac{1}{1 - x^N} = \sum_{q=0}^{+\infty} x^{qN} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$, avec $c(n) = 1$ si N divise n , et $c(n) = 0$ sinon.

Les deux séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{N-1}(n) x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$ ont un rayon de convergence ≥ 1 .

Les deux séries convergent donc absolument (car $|x| < 1$). Par produit de Cauchy, on a

$$\forall |x| < 1, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{N-1}(n) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c(n) x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{N-1}(n-k) c(k) \right) x^n$$

Or, $\sum_{k=0}^n a_{N-1}(n-k)c(k) = \sum_{k \text{ multiple de } N} a_{N-1}(n-k) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n-qN)$, donc $= a_N(n)$ par a).

On obtient ainsi $f_{N-1}(x) \frac{1}{1-x^N} = f_N(x)$.

De plus, $f_0(x) = 1$, car $a_0(n) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0(n) = 1$.

Par récurrence immédiate sur $N \in \mathbb{N}$, on obtient donc bien $f_N(x) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k}$.

4) a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Comme $p_k \leq \frac{n}{k}$, alors $\forall k > n$, $p_k = 0$. Donc $\forall N > n$, $a_N(n) = a_n(n)$.

Ainsi la suite $(a_N(n))_{N \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang n . A fortiori, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_N(n) = a_n(n) = b(n)$.

La suite $(a_N(n))_{N \in \mathbb{N}}$ est aussi croissante, car $a_N(n) \geq a_{N-1}(n)$ (cf 3) a) par exemple).

b) Soit $M \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{n=0}^M a_N(n) x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n) x^n = f_N(x)$. Or, $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N(n) = b(n)$.

Par passage à la limite $N \rightarrow +\infty$, on en déduit $\sum_{n=0}^M b(n) x^n \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x) = g(x)$.

En faisant tendre M vers $+\infty$, on en déduit que $\sum b(n) x^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} b(n) x^n \leq g(x)$.

D'autre part, les suites $N \rightarrow a_N(n)$ sont croissantes, donc $a_N(n) \leq b(n)$.

On en déduit $f_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n) x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b(n) x^n$.

Par passage à la limite des inégalités larges, on obtient $g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b(n) x^n$.

On en conclut par double encadrement que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n) x^n$.

Remarque : On pourrait aussi utiliser le th de cv dominée pour les séries, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_N(n) = b(n)$

Sachant que $0 \leq a_N(n) \leq b(n)$, il faut de toute façon prouver d'abord la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} b(n) x^n$.

5) a) L'existence de l'intégrale va résulter de l'application du théorème ITT (cf énoncé du théorème).

On pose $f_n(t) = -\frac{e^{-nt}}{n}$ et $\forall t > 0$, $\phi(t) = \ln(1 - e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n}$.

- On a bien $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty}$ continue sur $]0, +\infty[$.

- De plus, f_n est intégrable et $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n^2}$.

- Ainsi, $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge.

Par le théorème ITT, ϕ est intégrable et $\int_0^{+\infty} \phi(t) dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

b) On fixe $0 < x < 1$. On effectue le changement de variable affine $u = -t \ln x$.

On obtient donc $J(x) = \frac{-1}{-\ln x} \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt = \frac{-1}{\ln x} \frac{\pi^2}{6} \sim \frac{\pi^2}{6(1-x)}$ car $\ln x \sim (1-x)$.

6) a) L'application $t \mapsto -\ln(1 - x^{-t})$ est (positive et) décroissante sur $]0, +\infty[$.

Par comparaison entre sommes et intégrales, on a donc

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - x^k) \leq \int_0^{+\infty} -\ln(1 - x^t) dt$$

En composant par la fonction croissante $\exp$, on obtient bien $g(x) \leq \exp(J(x))$.

b) Soit $0 < x < 1$. Comme les b_n sont positifs, on a $b_n x^n \leq g(x)$, et donc $b_n \leq \frac{\exp(J(x))}{x^n}$.

On prend $x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a donc $b_n \leq (x_n)^{-n} \exp(J(x_n))$.

On a $J(x_n) \sim \frac{\pi^2}{6} \sqrt{n}$, donc $J(x_n) \leq 2\sqrt{n}$ pour n assez grand (car $\frac{\pi^2}{6} < 2$).

De même $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(2\sqrt{n})$ pour n assez grand.

(en effet, on a $-\ln(1 - \varepsilon) \sim \varepsilon$ en $\varepsilon = 0$, donc $-\ln(1 - \varepsilon) \leq 2\varepsilon$ pour ε assez petit).

On en déduit que $b_n \leq \exp(4\sqrt{n})$ pour n assez grand.