

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) [1 pt] Soit $P(X) = \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k) \in \mathbb{C}[X]$. Donner une CNS pour que $P(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

2) [1 pt] Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ telle que $P(A) = O_n$.

Démontrer la propriété du cours : toute valeur propre de A est racine de $P(X)$.

3) [2.5 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A est diagonalisable

(ii) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = O_n$ et $P'(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Problème

(inspiré de Mines-PC 2022)

Partie A

Pour $x \in]-1, 1[$, on considère $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

1) [1 pt] Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} L(x^k)$ converge.

2) [1.5 pt] En déduire que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k}$ existe (qu'on note $\prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k}$) et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k} = \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} L(x^k) \right)$$

Partie B

Pour n et $N \in \mathbb{N}$, on note $E_N(n)$ l'ensemble des N -uplets d'entiers $(p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^N$ tels que

$$\sum_{k=1}^N k p_k = n \quad , \quad \text{c'est-à-dire} \quad p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + Np_N = n$$

On pose $a_N(n) = \text{card } E_N(n)$. On a en particulier, $a_0(n) = 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0(0) = 1$.

3) a) [1.5 pt] Soit $N \in \mathbb{N}$.

En utilisant une majoration simple de $a_N(n)$, montrer que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_N(n) x^n$ est de rayon $R \geq 1$.

b) [2 pts] Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_N(n) = \sum_{q=0}^{\lfloor n/N \rfloor} a_{N-1}(n - qN)$$

c) [2.5 pts] Soit $N \in \mathbb{N}$. Par a), pour $|x| < 1$, on peut poser

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n) x^n$$

Montrer que pour tout $|x| < 1$,

$$f_N(x) = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k}.$$

Suggestion pour la rédaction : Noter $c(n)$ les coefficients du DSE de $\frac{1}{1-x^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n)x^n$.

4) a) [1 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $b(n) = a_n(n)$. Justifier que $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N(n) = b(n)$.

b) [2 pts] Soit $0 \leq x < 1$. On sait par la partie A qu'il existe

$$g(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_N(n) x^n \right)$$

Montrer que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n) x^n$$

Indication : Justifier d'abord que $\forall M \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^M b(n) x^n \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(x)$.

Partie C

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5) a) [2.5 pts] Montrer que $t \mapsto \ln(1 - e^{-t}) dt$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

b) [1 pt] Pour $0 \leq x < 1$, on pose $J(x) = -\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{t \ln x}) dt$, c'est-à-dire $J(x) = -\int_0^{+\infty} \ln(1 - x^t) dt$.

En utilisant un changement de variable affine, montrer que $J(x) \sim \frac{\pi^2}{6(1-x)}$ lorsque x tend vers 1^- .

6) a) [1.5 pt] Soit $0 < x < 1$. Par la partie A, on a

$$g(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^k} = \exp \left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-x^k) \right).$$

Montrer que $g(x) \leq \exp(J(x))$.

b) [2 pts] On sait par la partie B que g est DSE sur $[0, 1[$: on a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \in \mathbb{N}$.

En prenant $x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, déterminer une constante K telle que $b_n \leq \exp(K\sqrt{n})$ pour n assez grand.

Remarque culturelle :

$b(n)$ représente le nombre de façon de décomposer l'entier n sous la forme $n = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k$, où $p_k \in \mathbb{N}$.

On peut montrer qu'il existe des constantes α et β telles que $b(n) \sim \frac{\exp(\alpha\sqrt{n})}{\beta n} = \lambda_n$.

Dans le sujet Mines PC-PSI 2022, on montre que $b(n) = O_{+\infty}(\lambda_n)$, qui améliore 6) b).