

Exercice A. Interpolation et prolongement C^∞

1) [2 pts] Soit $g : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, t) \mapsto g(x, t)$ une fonction de classe C^∞ .

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on considère $F(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

a) [1 pt] Montrer que $f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$.

b) [0.5 pt] Montrer que $f(x) = (x-a)^n \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)) d\theta$.

c) [1 pt] Montrer que $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , des réels a et b distincts, des entiers n et $m \in \mathbb{N}^*$.

a) [1.5 pt] Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+m-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(b) = f^{(k)}(b)$$

b) [1.5 pt] Montrer qu'il existe une fonction F de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - P(x) = (x-a)^n (x-b)^m F(x)$$

Exercice B. Retours dans une chaîne de Markov

Première partie. Lemmes sur les matrices stochastiques

1) On note $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ la matrice ligne dont tous les coefficients valent 1.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est dite *matrice de transition* ssi elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- tous les coefficients de A sont des réels positifs

- $LA = L$

Dans la suite de cette partie, on considère une matrice de transition $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^N$, on note $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = A^n Y_0$.

a) [1.5 pt] Montrer brièvement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est une matrice de transition.

En déduire que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) [1.5 pt] Montrer que pour tout $Z \in \text{Im}(A - I_N)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n}{n+1} = 0$.

c) [2.5 pts] En déduire que $\text{Im}(A - I_N) \oplus \text{Ker}(A - I_N) = \mathbb{R}^N$ et qu'il existe

$$B = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{I_N + A + \dots + A^n}{n+1} \right)$$

et que $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice de projection dont on précisera noyau et image.

2) Pour des vecteurs X et $Y \in \mathbb{R}^N$, on note $X \leq Y$ pour signifier $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, x_i \leq y_i$.

a) [1 pt] Montrer qu'il existe un vecteur non nul $X = (x_1, \dots, x_N)$ appartenant à $\text{Ker}(A - I_N)$.

b) [1 pt] On considère le vecteur $Y_0 = (|x_1|, \dots, |x_N|)$. Montrer que $AY_0 \geq Y_0$.

c) [1 pt] On pose $Z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n}{n+1}$, où $Y_n = A^n Y_0$. Montrer que Z est non nul.

d) [1 pt] Montrer qu'il existe un vecteur $Z = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ vérifiant

$$AZ = Z \quad \text{et} \quad (\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mu_j \geq 0) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N \mu_j = 1$$

Seconde partie. Nombre moyen de retours dans une chaîne de Markov

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une chaîne de Markov à valeurs dans $\Delta = \{1, 2, \dots, N\}$.

Autrement dit, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans Δ vérifiant les deux propriétés :

(i) il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \Delta^2, P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = a_{ij}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j_0, \dots, j_n) \in \Delta^{n+2}, P(X_{n+1} = i \mid (X_0, X_1, \dots, X_n) = (j_0, j_1, \dots, j_n)) = P(X_{n+1} = i \mid X_n = j_n)$

3) [1 pt] Montrer que A est une matrice de transition.

4) [1.5 pt] On pose $A^n = (a_{ij}^{(n)})_{(i,j) \in \Delta^2}$. En utilisant (i) et (ii), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \Delta^2, P(X_n = i \mid X_0 = j) = a_{ij}^{(n)}$$

On pourra utiliser *sans justification* la formule des probas totales pour les lois conditionnelles :

Si $(B_n)_{n \in E}$ est un système complet, alors $P(A \mid C) = \sum_{n \in E} P(A \mid B_n \cap C)P(B_n \mid C)$.

5) [1.5 pt] On considère $a_n = \text{card}\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid X_k = X_0\}$.

On pose $B = (b_{ij})_{(i,j) \in \Delta^2}$, où B est définie en 1). Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(a_n)}{n+1} = \sum_{j=1}^N b_{jj} P(X_0 = j)$$

6) [1.5 pt] On suppose ici que $\text{Ker}(A - I_N)$ est une droite vectorielle.

Il résulte donc de 2) d) qu'il existe un unique vecteur $Z = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ vérifiant

$$\text{Ker}(A - I_N) = \mathbb{R} Z \quad \text{et} \quad (\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \mu_j \geq 0) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N \mu_j = 1$$

Montrer que $b_{jj} = \mu_j$.