

Interrogation n°19. Corrigé

Exercice A

1) a) $P(A) - P(B) = E(1_A) - E(1_B) = E(1_A - 1_B)$.

Or, $|1_A - 1_B| = 1_{A \cap \bar{B}} + 1_{\bar{A} \cap B}$, donc $|P(A) - P(B)| = |E(1_A - 1_B)| \leq E(|1_A - 1_B|) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.

b) Par a), $|P(X = n) - P(Y = n)| \leq P(X = n, Y \neq n) + P(X \neq n, Y = n)$.

Et $\forall t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |P(X = n) - P(Y = n)|$.

On conclut en notant que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y \neq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, X \neq Y) = P(X \neq Y)$.

Et de même pour $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X \neq n, Y = n)$.

2) Z_n est une v.a. positive et entière. Donc $P(Z_n \neq 0) = P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n)$ par Markov.

3) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = G_{X_n}(t) = (1 - \lambda_n) + \lambda_n t$, donc $F_n(t) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k(1 - t))$.

Remarque : Pour $t \in [0, 1]$, la suite $(F_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et décroissante, donc converge.

Dans le cas général $t \in [-1, 1]$, on utilise les propriétés sur les produits infinis :

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$. Pour $n > p$ assez grand, $f_n(t) > 0$, et on a $\ln f_n(t) \sim \lambda_n(t - 1)$.

Par comparaison, la série $\sum_{n > p} \ln f_n(t)$ converge (absolument) vers un réel L .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = F_p(t)e^L$.

4) *Remarque :* Montrons que X est une variable aléatoire :

Pour $k \in \mathbb{N}$, $(X = k) = \cup_{j \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq j} (X_n = k)$ est un événement, et $(X = +\infty) = \cup_{n \in \mathbb{N}} (X_n = +\infty)$

On a $(X_n \neq X) = \bigcup_{j \geq n} (Z_j \neq 0)$, donc $P(X_n \neq X) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} P(Z_j \neq 0) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} E(Z_j)$ par 1).

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=n}^{+\infty} E(Z_j) = 0$ (reste d'une série cv). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \neq X) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = X) = 1$.

La suite des événements $(X_n = X)$ est croissante et $(X < +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n = X)$.

Par continuité croissante, on a donc $P(X < +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = X) = 1$.

5) Par 1), on a $\sup_{t \in [-1, 1]} |G_{X_n}(t) - G_X(t)| \leq 2P(X_n \neq X) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Donc la suite de fonctions $(G_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1, 1]$.

6) Par le cours et indépendance des Z_j , X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \sum_{j=0}^n \lambda_j$.

Donc $\forall t \in [-1, 1]$, $G_{X_n}(t) = \exp((t - 1)\mu_n)$.

La cv uniforme implique la cv simple, donc $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \exp((t - 1)\mu)$, car $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$.

Comme une série entière admet un unique DSE, alors X suit la loi de Poisson de paramètre μ .

7) a) On a $|1_{X_n > k} - 1_{X > k}| \leq 1_{X_n \neq X}$, car si $X_n(\omega) = X(\omega)$, alors a fortiori $(X_n(\omega) > k) \text{ ssi } (X(\omega) > k)$.

Donc $|P(X_n > k) - P(X > k)| = |E(1_{X_n > k} - 1_{X > k})| \leq E(|1_{X_n > k} - 1_{X > k}|) \leq E(1_{X_n \neq X}) = P(X_n \neq X)$.

b) Soit $K \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^K P(X_n > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n > k) = E(X_n) = \sum_{j=0}^n E(Z_j)$.

Par a), $\forall k$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n > k) = P(X > k)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K P(X_n > k) = \sum_{k=0}^K P(X > k)$.

D'où le résultat par passage à la limite des inégalités larges.

c) Par b), la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} P(X_n > k)$ converge, donc X est d'espérance finie et $E(X) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} E(Z_j)$.

L'inégalité réciproque provient du passage à la limite de $\sum_{j=0}^n E(Z_j) = E(X_n) \leq E(X)$, car $X_n \leq X$.

Exercice B

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière non constante de rayon $R > 0$ et vérifiant $a_0 = 1$.

1) La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence forte : $b_0 = 0$ et $b_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} b_k a_{n-k}$.

2) a) On obtient donc $|b_n| \leq |a_n| + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |a_{n-k}|$ par inégalité triangulaire et $\frac{k}{n} \leq 1$.

b) $S_n(\rho) = \sum_{k=0}^n |b_k| \rho^k \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \rho^k + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} (|b_j| \rho^j) (|a_{k-j}| \rho^{k-j})$.

Or, $\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} (|b_j| \rho^j) (|a_{k-j}| \rho^{k-j}) \leq \sum_{j=0}^{n-1} (|b_j| \rho^j) \sum_{i=0}^n (|a_i| \rho^i) \leq \Delta(\rho) \sum_{j=0}^{n-1} (|b_j| \rho^j)$.

Donc $S_n(\rho) \leq \Delta(\rho) + \Delta(\rho) S_{n-1}(\rho)$, c'est-à-dire $1 + S_n(\rho) \leq 1 + \Delta(\rho)(1 + S_{n-1}(\rho))$.

b) Il suffit de prouver le résultat par récurrence. On a bien $1 + S_0(\rho) = 1$.

Si la propriété est vraie au rang $n-1$, on obtient $1 + S_0(\rho) \leq 1 + \Delta(\rho) \frac{\Delta(\rho)^n - 1}{\Delta(\rho) - 1} = \frac{\Delta(\rho)^{n+1} - 1}{\Delta(\rho) - 1}$.

Remarque culturelle : On peut le trouver en utilisant la méthode de variation de la constante, appliquée à $u_n = 1 + S_n(\rho)$

qui vérifie : $u_{n+1} \leq 1 + \Delta(\rho) u_n$ et on pose $u_n = \Delta(\rho)^n k_n$.

3) On a : $b_n \rho^n \leq S_n(\rho) = O(\Delta(\rho)^n)$, donc $b_n = O\left(\left(\frac{\Delta(\rho)}{\rho}\right)^n\right)$

Donc $\sum b_n x^n$ converge absolument pour $|x| < \frac{\rho}{\Delta(\rho)}$. Donc $R' \geq \frac{\rho}{\Delta(\rho)} > 0$.

4) Pour $|x| < \min(R, R')$, on a $f'(x) = f(x)g'(x)$ par la relation initiale définissant les b_n .

Donc $x \mapsto f(x)e^{-g(x)}$ est constante. En prenant la valeur en $x = 0$, on obtient $f(x) = e^{g(x)}$.

Exercice C

1) L'application $X_i \mapsto X_i - E(X_i)$ est linéaire et $(X_i, X_j) \mapsto E(X_i X_j)$ est bilinéaire.

Donc $(X_i, X_j) \mapsto \text{Cov}(X_i, X_j)$ est bilinéaire.

D'où $\text{Cov}(Y_v, Y_w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \langle v, Mw \rangle$.

2) Par a), on a $\langle v, Mv \rangle = V(Y_v) \geq 0$, d'où le résultat.

3) On choisit une BON $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de M : $\langle v_i, Mv_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$.

On a donc $\text{Cov}(Y_{v_i}, Y_{v_j}) = 0$ si $i \neq j$ et $V(Y_{v_i}) = \lambda_i \|v_i\|^2 = \lambda_i$.