

Exercice A (*inspiré Centrale MP 2017 et Centrale PSI 2015*) (12 pts)

1) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

a) [1.5 pt] Soient A et B deux événements. Montrer que $|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.

Indication : Utiliser l'espérance de $|1_A - 1_B|$.

b) [1.5 pt] Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $\forall t \in [-1, 1], |G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y)$.

On considère **désormais** des variables entières $Z_n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ d'espérances finies telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n) < +\infty$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \sum_{j=0}^n Z_j$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et à valeurs entières.

Ainsi, $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est soit stationnaire soit tend vers $+\infty$. On note $X(\omega)$ la valeur limite (finie ou infinie).

2) *Un premier exemple.* Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$ une série convergente de réels strictement positifs.

On suppose ici que les Z_n sont indépendantes, et que Z_n suit la loi de **Bernoulli** de paramètre λ_n .

a) [0.5 pt] Soit $t \in [-1, 1]$. Expliciter sans justification $f_n(t) = G_{Z_n}(t)$ et $F_n(t) = G_{X_n}(t)$.

b) [2 pts] Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que $(F_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3) [0.5 pt] *On revient au cas général.* Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z_n \neq 0) \leq E(Z_n)$.

4) [2 pts] On **admet** que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = X) = 1$ et en déduire que $P(X < +\infty) = 1$.

Ainsi, X est presque sûrement finie, et on peut considérer X comme une variable à valeurs entières.

5) [0.5 pt] Montrer que la suite de fonctions $(G_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1, 1]$.

6) [1 pt] *Un second exemple.* Soit une série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$ de réels strictement positifs.

On suppose ici que les Z_n sont indépendantes, et que Z_n suit la loi de **Poisson** de paramètre λ_n .

Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

7) *On revient au cas général.*

a) [1 pt] Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |P(X_n > k) - P(X > k)| \leq P(X_n \neq X)$.

Indication : On pourra utiliser des fonctions indicatrices.

b) [1 pt] Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \neq X) = 0$, montrer : $\forall K \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^K P(X > k) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n)$.

c) [1 pt] En déduire que X est d'espérance finie et que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n)$.

Exercice B. Logarithme d'une série entière (extrait Centrale PSI)

 (7 pts)

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière non constante de rayon $R > 0$ et vérifiant $a_0 = 1$.

1) [1 pt] Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \sum_{k=0}^n k b_k a_{n-k}$$

2) Soit $0 < \rho < R$. Posons $S_n(\rho) = \sum_{k=0}^n |b_k| \rho^k$ et $\Delta(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \rho^n > 1$.

a) [0.5 pt] Montrer que $|b_n| \leq |a_n| + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k a_{n-k}|$.

b) [1.5 pt] Montrer que $S_n(\rho) \leq \Delta(\rho) + \Delta(\rho) S_{n-1}(\rho)$.

c) [1 pt] En déduire que $1 + S_n(\rho) \leq \frac{\Delta(\rho)^{n+1} - 1}{\Delta(\rho) - 1}$.

3) [1.5 pt] Montrer que $\sum b_n x^n$ admet un rayon de convergence $R' > 0$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

4) [1.5 pt] En utilisant une équation différentielle, montrer que $\forall |x| < \min(R, R'), \quad f(x) = \exp(g(x))$.

Exercice C. Variable aléatoire à valeurs vectorielles

 (2.5 pts)

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ une v.a. à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

On suppose que $E(\|X\|^2) < +\infty$. On considère la matrice symétrique

$$M = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

1) [1.5 pt] Pour $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $Y_v = \langle v, X \rangle = \sum_{i=1}^n v_i X_i$.

Pour v et $w \in \mathbb{R}^n$, exprimer $\text{Cov}(Y_v, Y_w)$ en fonction de v , w et M .

2) [0.5 pt] Montrer que M est positive, c'est-à-dire $\forall v \in \mathbb{R}^n, \langle v, Mv \rangle \geq 0$.

3) [0.5 pt] Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les n variables aléatoires réelles Y_v , pour $v \in \mathcal{B}$, sont deux à deux non corrélées.

Que peut-on dire des $V(Y_v)$ dans ce cas ?