

Exercice A. Borne de Tchernoff pour les sommes d'indicatrices [7.5 pts]

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\delta \in]0, 1[$.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètres respectifs

$p_1, \dots, p_n$, c'est-à-dire $P(X_i = 1) = p_i$ et $P(X_i = 0) = 1 - p_i$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad m = E(S)$$

1) a) [1 pt] Montrer que pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\forall t \in \mathbb{R}, E(\exp(tX_i)) \leq \exp(p_i(e^t - 1))$.

b) [1 pt] Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, E(\exp(tS)) \leq \exp(m(e^t - 1))$.

c) [1.5 pt] En déduire que

$$\forall t > 0, \quad P(S \geq (1 + \delta)m) \leq \exp(m(-t(1 + \delta) + e^t - 1))$$

2) [1 pt] On considère la fonction φ définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = (1 + x) \ln(1 + x) - x$$

Montrer que $\forall x \in] -1, +\infty[\setminus \{0\}, \varphi(x) > 0$.

3) a) [1.5 pt] Démontrer que

$$P(S \geq (1 + \delta)m) \leq \exp(-\varphi(\delta)m)$$

b) [1.5 pt] En s'inspirant de 1) c), montrer également que

$$P(S \leq (1 - \delta)m) \leq \exp(-\varphi(-\delta)m)$$

Exercice B. Inégalité de Hoffman-Wieland (Centrale MP 2021) [12.5 pts]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme de Frobenius (norme euclidienne canonique) : $\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}(M^T M)}$.

Pour toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A (répétées avec multiplicité) classées par ordre décroissant. On pose $D_A = \text{Diag}(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$.

On note $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A)$.

Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) a) [1 pt] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices orthogonales P et $Q \in O_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\|PMQ\|_F = \|M\|_F$.

b) [1.5 pt] Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\|A - B\|_F^2 = \|D_A P - P D_B\|_F^2$$

c) [1 pt] Montrer que

$$\|A - B\|_F^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} p_{ij}^2 (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$$

2) On suppose dans cette question A et $B \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\lambda_1(A) > \dots > \lambda_n(A) \quad \text{et} \quad \lambda_1(B) > \dots > \lambda_n(B).$$

On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ dont les coefficients sont tous positifs et tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n m_{ij} = \sum_{j=1}^n m_{ji} = 1 \quad (\text{sommes par lignes et par colonnes})$$

On considère $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$.

a) [1.5 pt] Montrer que $\inf\{f(M), M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\}$ existe et est atteint.

On se propose de prouver dans la suite que ce minimum est atteint en la matrice identité.

b) [1.5 pt] Soient $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$ tels que $i < j$ et $i < k$.

Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}) - f(M) = 2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) < 0$$

c) [2.5 pts] Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique différente de l'identité.

On considère i le plus petit entier tel que $m_{ii} \neq 1$.

Montrer qu'il existe $M' \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M') < f(M)$.

d) [0.5 pt] En déduire que $\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\} = f(I_n)$.

e) [1 pt] Montrer que $\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2$.

3) a) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Construire une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$ et convergeant vers A .

b) [0.5 pt] Montrer que pour tous A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2$.