

Interrogation n°18. Corrigé

1) Si $k > 0$, $y(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$, où $\omega = \sqrt{k}$. Si $k = 0$, $y(t) = t$. Si $k < 0$, $y(t) = \frac{\text{sh}(\omega t)}{\omega}$, où $\omega = \sqrt{-k}$.

2) a) On a $\varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$ et $\varphi''(t) = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, ty)$.

b) On a par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|\varphi(1) - \varphi(0) - \varphi'(0)| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} |\varphi''(t)|$.

Or, $\varphi(0) = f(0,0)$, $\varphi'(0) = ax + by$ et $\sup_{t \in [0,1]} |\varphi''(t)| \leq x^2 M + 2|xy| M + y^2 M$.

3) On considère un changement de variable $F(u, v) = f(x, y)$ de sorte que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ apparaisse dans $\frac{\partial F}{\partial u}$.

On choisit par exemple $x = u$ et $y = u + v$, d'où $F(u, v) = f(u, u + v)$. Ainsi $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)(u, u + v)$.

Donc f vérifie (E) ssi $\frac{\partial F}{\partial u} = \lambda F$, c'est-à-dire ssi $F(u, v) = k(v) e^{\lambda u}$, où $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

On en conclut que les solutions de (E) sont les $f(x, y) = k(y - x) e^{\lambda x}$, où $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 .

4) Remarque : Comme f admet un extremum en $\vec{0}$, alors $\nabla f(\vec{0}) = \vec{0}$.

a) Posons $A = H_f(0,0)$. On a $f(X) = f(\vec{0}) + \frac{1}{2} X^T A X + o(\|X\|^2)$, car $\nabla f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Supposons par l'absurde A non positive. Alors il existe un vecteur propre Z de valeur propre $\lambda < 0$.

On a alors $f(tZ) = f(\vec{0}) + \frac{1}{2} \lambda \|Z\|^2 t^2 + o(t^2)$ lorsque $t \rightarrow 0$, donc $f(tZ) < 0$ pour t assez petit non nul.

Ce qui contredit que f admet en $\vec{0}$ un minimum local.

Remarque : On peut être tenté de ne pas raisonner par l'absurde :

On fixe Z et on veut montrer $Z^T A Z \geq 0$. On a $f(tZ) - f(\vec{0}) = \frac{1}{2} Z^T A Z t^2 + o(t^2)$.

Donc $\frac{1}{2} Z^T A Z + o(1) \geq 0$ lorsque $t \rightarrow 0$. Par passage à la limite, $Z^T A Z \geq 0$.

b) Les valeurs propres λ et μ de $H_f(0,0)$ sont positives, donc $\det H_f(0,0) = \lambda \mu \geq 0$.

Or, $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$, donc $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \right)^2 \leq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

5) a) On a $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n v_j x_j$, donc $\nabla \varphi(x) = v$ pour tout $x \in E$.

b) Il existe $r \geq 0$ tel que $\forall x \geq r$, $f(x) \geq f(\vec{0})$. Posons $K = B(\vec{0}, r)$.

K est un compact et f continue, donc f est bornée sur K et il existe $a \in K$ tel que $f(a) = \inf f(K)$.

Pour $x \in E \setminus K$, on a $f(x) > f(\vec{0}) \geq f(a)$, car $\vec{0} \in K$. Donc $\inf f(E) = f(a)$.

Comme $a \in E$ ouvert et que f admet en a un minimum global (donc local), alors $\nabla f(a) = \vec{0}$.

c) Soit $v \in E$. Posons $g(x) = f(x) - \langle v, x \rangle$. Par Cauchy-Schwarz, on a $\langle v, x \rangle \leq \|v\| \|x\|$.

On a $\forall x \neq \vec{0}$, $\frac{g(x)}{\|x\|} \geq \frac{f(x)}{\|x\|} - \|v\|$, donc $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$. D'où $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Et g est C^1 . Par b), il existe $a \in E$ tel que $\nabla g(a) = \vec{0}$, c'est-à-dire $\nabla f(a) = v$.

6) a) On pose $x_n = \frac{y_n}{2^n}$. On a $y_n - y_{n-1} = 2^n a_n$, donc $y_n - y_0 = \sum_{k=1}^n 2^k a_k$.

Donc $x_n = \frac{x_0}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^{n-k}}$.

b) On a donc $|x_n| \leq \frac{|x_0|}{2^n} + M \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq |x_0| + 2M$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

c) Par linéarité de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut par linéarité se ramener aux deux cas :

- Cas où $a_n = L$ constante. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2L$.

- Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $n \geq p$ assez grand, $|a_n| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \geq p$, $|x_n| \leq \frac{|x_0|}{2^n} + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{|a_j|}{2^{n-j}} + \varepsilon \sum_{j=p}^{n-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{|x_0|}{2^n} + \frac{1}{2^{n-p}} \sum_{j=0}^{p-1} |a_j| + 2\varepsilon$.

Donc pour n assez grand, $|x_n| \leq 3\varepsilon$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x_0|}{2^n} + \frac{1}{2^{n-p}} \sum_{j=0}^{p-1} |a_j| = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

7) a) Avec $f(x) = z(x)e^{-ax}$, on obtient $f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t)e^t dt$.

Comme $f(0) \leq 0$ et $g \leq 0$, alors $f(x) \leq 0$.

b) On utilise la factorisation du polynôme d'endomorphisme :

En notant $D : y \mapsto y'$, on a $D^2 + 2D + \text{Id} = (D + \text{Id}) \circ (D + \text{Id})$.

Ainsi, en posant $g = f' + f$ et $h = g' + g$, on a $f'' + 2f' + f = h$.

Par hypothèse $h \leq 0$ et $g(0) \leq 0$, donc par a), $g \leq 0$, puis à nouveau par a), $f \leq 0$.

8) Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers (x, y) . Considérons $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $r = \frac{1}{2}(\rho + R) < R$.

Pour $n \geq n_0$ assez grand, $|x_n + iy_n| \leq r$. Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{n \geq n_0} |a_k(x_n + iy_n)^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k < +\infty$.

D'autre part, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + iy_n) = (x + iy)$.

On en déduit par le théorème de la double limite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = f(x, y)$.

9) a) $a_{i,j,k} = a_{i,k,j}$ car par le théorème de Schwarz $\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_k \partial x_j}$.

D'autre part, $(A_i(x) \mid A_j(x)) = \delta_{ij}$ car les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une BON.

Donc la dérivée partielle selon x_k est nulle, c'est-à-dire $\left(A_i(x) \mid \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(x) \right) + \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}(x) \mid A_j(x) \right) = 0$.

On en déduit $\left(A_i(x) \mid \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(x) \right) = - \left(A_j(x) \mid \frac{\partial A_i}{\partial x_k}(x) \right)$, c'est-à-dire $a_{i,j,k} = -a_{j,i,k}$.

b) On a $a_{i,j,k} = -a_{j,i,k} = -a_{j,k,i} = -a_{k,j,i} = a_{k,i,j} = -a_{i,k,j} = -a_{i,j,k}$, donc $a_{i,j,k} = 0$.

Ainsi, $\frac{\partial A_j}{\partial x_k}(x)$ est orthogonal à tout vecteur $A_i(x)$, qui forment une base, donc $\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = 0$.

c) On a donc A_j constante (car de gradient nul), c'est-à-dire $J_f(x)$ constante de valeur $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, $f(x) = f(0) + \int_0^1 J_f(tx) x dt$, donc $f(x) = f(0) + Mx$.

Réciproque immédiate : si $f(x) = Mx + v$, alors $J_f(x) = M \in O_n(\mathbb{R})$.