

Interrogation n°18. Barème sur 23 pts

1) [1.5 pt] Pour k réel, on considère l'équation différentielle $(E) : y'' + ky = 0$.

Expliciter *sans justification* et selon les valeurs de k , la solution y de (E) vérifiant $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $K = f(0, 0)$, $a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

a) [1 pt] On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(tx, ty)$. Expliciter sans justification $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$.

b) [1 pt] On suppose que les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont *toutes* bornées sur $\mathbb{R}^2$ par un même réel M .

En utilisant φ sur $[0, 1]$, montrer que $|f(x, y) - K - ax - by| \leq \frac{1}{2} M (x^2 + 2|xy| + y^2)$.

3) [2.5 pts] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe C^1 vérifiant

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f$$

Indication : Considérer $F(u, v) = f(u, u + v)$.

4) [3.5 pts] Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe C^2 .

On suppose que f admet en $(0, 0)$ un minimum local, et en particulier qu'on a $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$.

a) Montrer *la propriété du cours* : La matrice Hessienne $H_f(0, 0)$ est positive, c'est-à-dire $H_f(0, 0) \in S_2^+(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right| \leq \sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)}$.

5) On pose $E = \mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

a) [0.5 pt] Soit $v \in E$. Calculer le gradient $\nabla \varphi(x)$ de la fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \langle v, x \rangle$.

b) [2 pts] On suppose que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $\inf f(E) = \inf f(K)$, où $K = B(\vec{0}, r)$.

En déduire que f admet un point critique, c'est-à-dire qu'il existe $a \in E$ tel que $\nabla f(a) = \vec{0}$.

c) [2 pts] On suppose que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

Montrer que $\nabla f : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ est surjective, c'est-à-dire que pour $v \in E$, il existe $a \in E$ tel que $\nabla f(a) = v$.

6) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} = a_n$.

a) [1 pt] Soient n et $N \in \mathbb{N}$. Exprimer x_n en fonction de x_0 et des a_k .

b) [1 pt] On suppose $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. On pose $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

c) *Question supplémentaire* : Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

7) a) [1.5 pt] Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On pose $g = f + f'$.

On suppose que $f(0) \leq 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) \leq 0$. Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq 0$.

b) [1 pt] Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

On suppose que $f(0) \leq 0$ et $f'(0) \leq 0$ et que $\forall x \in [0, +\infty[, (f'' + 2f' + f)(x) \leq 0$.

Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) \leq 0$.

8) [1.5 pt] Soit $\sum a_k z^k$ une série entière complexe de rayon $R > 0$.

On considère $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x + iy)^k$$

En utilisant le théorème de la double limite, montrer que f est continue sur U .

9) (★) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$.

On suppose que f est de classe C^3 et que la matrice jacobienne $J_f(x) \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On note $A_1(x), \dots, A_n(x)$ les colonnes de la matrice orthogonale $J_f(x)$.

a) [1.5 pt] Pour tous $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$, on pose $a_{i,j,k} = \left(A_i(x) \mid \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(x) \right) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$.

Montrer que $a_{i,j,k} = a_{i,k,j}$ et $a_{i,j,k} = -a_{j,i,k}$.

b) [1.5 pt] En déduire $a_{i,j,k} = 0$ et que $\frac{\partial A_j}{\partial x_k}(x) = 0$.

c) [0 pt] En déduire qu'il existe $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Mx + v$.