

Interrogation n°17. Barème sur 24 pts

1) [1 pt] Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$.

2) [2 pts] Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . On pose $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

On suppose $\varphi'(0) = 0$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et montrer (par pincement) que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

3) [1.5 pt] Soit $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

Déterminer les fonctions φ vérifiant l'équation $(E) : \forall (x, y) \neq (0, 0), x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2$.

4) On considère $E = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ muni de la norme euclidienne. On considère l'application

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

a) [0.5 pt] En utilisant les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, calculer $\vec{\nabla} f(X)$ pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)$ non nul.

b) [1.5 pt] Sans utiliser les coordonnées, montrer (en utilisant le DL de $\sqrt{\cdot}$) que pour tout X non nul,

$$\|X + H\| = \|X\| + \frac{\langle X, H \rangle}{\|X\|} + o(\|H\|) \text{ lorsque } H \text{ tend vers } \vec{0}$$

Retrouver le résultat obtenu au a).

5) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (s, p) \mapsto f(s, p)$, où $U = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}$.

a) [1 pt] Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) [1 pt] On considère $g(x, y) = f(x + y, xy)$. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de f .

c) [1 pt] On considère désormais $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ et $\varphi : V \rightarrow U \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ xy \end{pmatrix}$.

On admet que φ est une bijection, et que φ et φ^{-1} sont de classe C^1 .

Pour tout $(x, y) \in V$, expliciter sans justification la matrice jacobienne $J_\varphi(x, y)$.

d) [1.5 pt] Soit $(s, p) \in U$.

Le polynôme $X^2 - sX + p$ admet deux racines réelles distinctes x et y , avec $x < y$.

En utilisant c) et le cours, montrer que $\frac{\partial x}{\partial s}(s, p) = \frac{x}{x - y}$ et donner de même la valeur de $\frac{\partial x}{\partial p}(s, p)$.

6) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$ de classe C^1 et $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 .

On suppose qu'il existe un réel positif m tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \left\| \vec{\nabla} f(x) \right\| \geq m$.

a) Soient des réels $a < b$. Exprimer sans justification $f(X(b)) - f(X(a))$ en fonction de X' et de $\vec{\nabla} f$.

b) On suppose de plus que X est une ligne de champ du gradient, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X'(t) \text{ est colinéaire et de même sens que } \vec{\nabla} f(X(t))$$

Montrer que $f(X(b)) - f(X(a)) \geq m \|X(b) - X(a)\|$.

7) On considère $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \quad X \mapsto f(X)$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On considère $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(Y) = f(u(Y))$, où $u : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p \quad X \mapsto AX$ linéaire.

a) [2 pts] Montrer que $H_g(\vec{0}) = A^T H_f(\vec{0}) A$.

Suggestion : Utiliser un $DL_2(\vec{0})$ et l'unicité du DL, qui est supposée connue.

b) [0.5 pt] On définit le laplacien $\Delta f(\vec{0}) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{0})$ et de même $\Delta g(\vec{0}) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 g}{\partial y_i^2}(\vec{0})$.

On suppose que u est une isométrie. Dédurre de a) que $\Delta g(\vec{0}) = \Delta f(\vec{0})$.

8) On identifie $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. On pose $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Pour $z \in U$, on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

a) [1 pt] Soit $z \in U$. Montrer que l'intégrale $\Gamma(z)$ est bien définie.

b) [1.5 pt] On suppose connue les intégrales de Bertrand. On pose $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \Gamma(x + iy)$.

Montrer avec soin que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe en tout point $(x, y) \in U$.

c) [0.5 pt] Exprimer sans justification $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

d) [2 pts] Montrer avec soin que Γ est continue sur U .

Remarque culturelle : On en déduit que f est C^1 , en prouvant de façon analogue la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

9) On pose $E = \mathbb{R}^p$. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(\vec{x})$ de classe C^2 .

a) [0.5 pt] Soit $(\vec{x}, \vec{v}) \in E \times E$. Exprimer $f(\vec{x} + \vec{v}) - f(\vec{x})$ en fonction du gradient $\vec{\nabla} f$ sur $[\vec{x}, \vec{x} + \vec{v}]$.

b) [1.5 pt] Soit F un sev de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $\vec{x} \in E$, pour tout $\vec{v} \in F^\perp$, $f(\vec{x} + \vec{v}) = f(\vec{x})$

(ii) Pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{\nabla} f(\vec{x}) \in F$.

c) [1.5 pt] Soit $r \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\varphi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall \vec{x} \in E, f(x_1, \dots, x_p) = \varphi(x_1, \dots, x_r)$

(ii) $\forall \vec{x} \in E, \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}}(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_{r+2}}(\vec{x}) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_p}(\vec{x}) = 0$

(iii) $\forall j \in \llbracket r+1, p \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{0}) = 0$ et $\forall \vec{x} \in E, H_f(\vec{x})$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} M(\vec{x}) & O \\ \hline O & O_{p-r} \end{array} \right)$, où $M(\vec{x}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.