

Interrogation n°16. Barème sur 22.5 pts.

1) On considère sur $E = \mathbb{R}^n$ la norme **euclidienne** $\| \cdot \|$ associé au produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$.

On note $S = \{X \in E \mid \|X\| = 1\}$ la sphère unité. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup_{X \in S} \|AX\|$.

a) [0.5 pt] Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Rappeler *sans justification* le lien entre $\sup_{X \in S} (X \mid MX)$ et le spectre de M .

b) [1 pt] En déduire une expression de $N(A)$ en fonction du spectre de $M = A^T A$.

c) [1.5 pt] Montrer que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

d) [1 pt] Montrer que pour toute matrice orthogonale $U \in O_n(\mathbb{R})$, on a $N(AU) = N(A)$.

e) [1.5 pt] On note $N_F(A)$ la norme euclidienne canonique de A , c'est-à-dire $N_F(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

Montrer que $N(A) \leq N_F(A)$.

2) On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$N(A) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(AU)$$

a) [1 pt] Justifier (*sans tout détailler*) que $N(A)$ est réel et qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = \text{tr}(AU)$.

Indication : Utiliser la fonction $f : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad U \longmapsto \text{tr}(AU)$.

b) [1 pt] Montrer que $N(A) \geq 0$.

c) [1 pt] On admet que $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $N(A) = 0$, alors $A = O_n$.

Remarque culturelle : On en déduit alors aisément que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) [1.5 pt] Soit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni d'une norme N et de la norme $\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} |A_{ij}|$, où $A = (A_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Démontrer *la propriété du cours* : Si $\sum N(A_n)$ converge, alors la série de matrices $\sum A_n$ converge.

Remarque : On pourra noter $(A_n)_{ij}$ le coefficient d'indice (i, j) de A_n .

4) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Un sev F de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dit stable par A ssi $\forall M \in F, AM \in F$.

a) [1.5 pt] Montrer qu'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que le sev $F = \text{Vect}(I, A, \dots, A^{r-1})$ est stable par A .

b) [1 pt] Soit une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n A^n$ converge. On pose $B = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n A^n$.

Montrer que $B \in F$.

Remarque culturelle : Ainsi, par exemple, $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est un polynôme en A .

5) Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit $f : E \rightarrow E$ une application contractante, c'est-à-dire lipschitzienne de rapport $k < 1$.

a) [1.5 pt] On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que $\|x_{n+1} - x_n\| = O(k^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b) [1.5 pt] Montrer que f admet un unique point fixe (c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$).

6) a) [1.5 pt] On considère sur $E = \mathbb{C}^p$ la norme $\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \sup_{x \in E, x \neq \vec{0}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

(i) Montrer que $\rho(A) \leq N(A)$.

(ii) Que dire de $N(A)$ lorsque A est diagonale ?

(iii) On prend $p = 2$. Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < N(A)$.

b) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose A diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ diagonale.

Donner sans justification une norme N' telle que $N'(A) = \rho(A)$.

Indication : Définir $N'(B)$ à l'aide de N , de P et de B .

c) [1 pt] On prend $n = 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$.

En s'inspirant de b), montrer qu'il existe une norme N' telle que $N'(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

7) On note Δ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = I_2$.

a) [2 pts] L'ensemble Δ est-il borné ? fermé ? ouvert ? convexe ?

b) [1.5 pt] On dit qu'un élément $A \in \Delta$ est isolé dans Δ ssi $\exists \varepsilon > 0, B(A, \varepsilon) \cap \Delta = \{A\}$, où $B(A, \varepsilon)$ désigne la boule de centre A et de rayon ε pour une norme (arbitraire) sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Autrement dit, un élément A n'est pas isolé ssi il existe une suite dans $\Delta \setminus \{A\}$ convergeant vers A .

(i) Soit $A \in \Delta$ distinct de I_2 et de $-I_2$. Montrer que A n'est pas isolé dans Δ .

(ii) Montrer que I_2 est isolé dans Δ .

8) *Exercice supplémentaire hors-interrogation* (★)

Soit $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue à valeurs complexes.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\left| \int_0^1 z(t) dt \right| = \int_0^1 |z(t)| dt$

(ii) il existe $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in [0, 1], z(t) = \rho(t)e^{i\theta}$.

Indication : Poser $\int_0^1 z(t) dt = Ae^{i\theta}$, et noter que $A = \left| \int_0^1 \text{Re}(z(t)e^{-i\theta}) dt \right|$.