

**Interrogation n°15.** Barème sur 25 pts. Evn : exos 1) à 4), séries entières : exos 5) à 11)

1) On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[X]$  des polynômes  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

a) [1 pt] Indiquer sans justification parmi les fonctions suivantes celles qui sont des normes sur  $\mathbb{C}[X]$  :

$$N_1(P) = |a_0| + \sup_{x \in [0,1]} |P(x)P'(x)|, \quad N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|, \quad N_3(P) = \max(|a_0|, |\sum_{k=1}^n a_k|).$$

b) [2 pts] Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que  $N(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^n |P^{(k)}(0)|^2}$  est une norme sur le sev  $\mathbb{C}_n[X]$ .

*Indication :* On suppose connues les normes usuelles sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

2) [1.5 pt] On pose  $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ .

On considère les normes  $N(f) = |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'|$  et  $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$ .

a) Montrer que  $\|f\|_\infty \leq N(f)$ .

b) Montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N$  ne sont pas équivalentes.

c) *Question supplémentaire hors-interrogation :* Mêmes questions avec  $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$

3) [1.5 pt] On admet la propriété de Bolzano-Weierstrass :

*Dans un evn  $F$  de dim finie, de toute suite bornée, on peut extraire une suite convergente dans  $F$ .*

Soit  $F$  un sev de dimension finie dans un evn  $E$ . Soit  $x \in E$ . On note  $d(x, F)$  la distance de  $x$  à  $F$ .

a) Montrer qu'il existe une suite bornée  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  telle que  $d(x, F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_n\|$ .

b) En déduire que la distance de  $x$  à  $F$  est atteinte : il existe  $a \in F$  tel que  $d(x, F) = \|x - a\|$ .

4) [2 pts] Soit  $N$  une norme sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Soient  $x$  et  $y \in E$ .

On pose  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) = N(x + ty)$ .

Montrer que  $f$  est convexe et déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t}$ .

5) a) [1.5 pt] Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^{1/n} = \lambda$ .

Montrer que si  $\lambda < 1$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Montrer que si  $\lambda > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

b) [1 pt] On suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = L > 0$ . Montrer que le rayon de convergence  $R$  de  $\sum a_n z^n$  vaut  $\frac{1}{L}$ .

**6)** [3 pts] *Les questions sont indépendantes. Les DSE usuels sont supposés connus*

a) Pour  $0 \leq q < 1$ , calculer  $M = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-q)q^{n-1}$ .

b) Pour  $|x| < 1$ , calculer  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

c) Calculer  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^{2n}}{(2n)!}$ .

**7)** (*extrait sujet écrit Mines PC*). On rappelle qu'il n'existe pas de logarithme sur  $\mathbb{C}$ .

*Et que la fonction logarithme réelle est bien définie et son DSE sur  $] -1, 1]$  est au programme !*

Pour tout nombre complexe  $z$  vérifiant  $|z| < 1$ , on considère  $L(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ .

a) [1.5 pt] Justifier brièvement que  $\varphi : t \mapsto L(tz)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  et calculer  $\varphi'(t)$ .

b) [1 pt] Montrer que  $\phi : t \mapsto (1 - tz) \exp(L(tz))$  est constante sur  $[0, 1]$  et en déduire  $\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}$ .

c) [1.5 pt] Montrer que  $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ .

d) [0.5 pt] Montrer que la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} L(z^k)$  converge.

**8)** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  vérifiant  $0 < R < +\infty$ .

a) [0.5 pt] Montrer qu'il existe un réel  $\lambda \geq 0$  tel que  $a_n = O(\lambda^n)$ .

b) [0.5 pt] Déterminer le rayon  $R'$  de la série entière  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} z^n$ .

c) [0.5 pt] (★) Donner sans justification le rayon  $R''$  de la série entière  $\sum a_n z^{(n^2)}$ .

**9)** [1 pt] On considère  $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$  et  $g : x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$  définies sur  $\mathbb{R}^*$ .

Montrer (brièvement !) que  $f$  et  $g$  admettent des prolongements de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**10)** [2 pts] On considère  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\exp(t) + 1} dt$ .

Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et DSE en 0 de rayon  $R \geq 1$ .

**11)** a) [1 pt] On considère  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $b_0 = 0$  et  $b_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$ .

Déterminer le rayon de convergence  $R_b$  de  $\sum b_n x^n$ .

b) [0.5 pt] On considère  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+2} = \frac{2n+1}{n+1} a_{n+1} + a_n$ .

Montrer que  $\sum a_n x^n$  admet un rayon de convergence  $R_a > 0$ .

c) [1 pt] (★) Déterminer  $R_a$ .