

Interrogation n°14. Corrigé.

1) En utilisant les théorèmes sur les dérivées de séries de fonctions, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

Remarque : Il s'agit ici de dérivées à droite en 0.

2) a) On a $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ et $\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n(n!)} x^{2n}$.

On conclut en notant que $(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k \leq \prod_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ pair}} k = 2^n(n!)$.

b) On a $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \times 4^n \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$. On a $R = \frac{1}{4}$.

3) On a $R = \min(\sqrt{R_0}, \sqrt{R_1})$.

En effet, $(\rho^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi $((\rho^2)^n a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $((\rho^2)^n a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

Or, $((\rho^2)^n a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si $\rho^2 < R_0$ et ne l'est pas si $\rho^2 > R_0$. Et de même avec R_1 pour $((\rho^2)^n a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

4) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, donc par le critère de d'Alembert, on a $R = 1$.

b) Comme $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, la série $\sum a_n$ diverge (par comparaison entre séries à termes positifs).

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, car $a_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{n+1} dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt = a_n$.

Comme de plus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $\sum (-1)^n a_n$ converge, par le critère spécial des séries alternées.

c) On a $\forall t, |x \cos(t)| < 1$. On a $\frac{1}{1 - x \cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n$.

Il s'agit donc de prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} x^n \cos(t)^n dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n dt$.

Or, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série de fonctions (en t) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Donc on peut intégrer terme à terme : $\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} x^n \cos(t)^n dt$.

5) a) $|e^{i\theta X}| \leq 1$, donc $e^{i\theta X}$ est d'espérance finie. Par transfert, $\phi_X(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{in\theta}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\phi_X(\theta) e^{-ik\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i(n-k)\theta}$.

La série de fonctions $\theta \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur le segment $[0, 2\pi]$.

On peut donc intégrer terme à terme : $\int_0^{2\pi} \phi_X(\theta) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = 2\pi a_n$.

Remarque : On a en fait $\phi_X(\theta) = G_X(e^{i\theta})$.

b) On a $e^{i\theta S_n} = e^{i\theta X_1} \dots e^{i\theta X_n}$.

Comme $e^{i\theta X_1}, \dots, e^{i\theta X_n}$ sont indépendantes, $E(e^{i\theta S_n}) = E(e^{i\theta X_1}) \dots E(e^{i\theta X_n})$, c'est-à-dire $\phi_{S_n}(\theta) = \phi_X(\theta)^n$.

Par a), on obtient donc $P(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(\theta)^n e^{-ik\theta} d\theta$.

c) On a $\phi_X(\theta) = a_0 + a_1 e^{i\theta} + \dots$

On a $|\phi_X(\theta)| \leq 1$, avec égalité ssi les $a_k e^{ik\theta}$ sont nuls ou ont le même argument.

Comme a_0 et a_1 sont > 0 , alors $|\phi_X(\theta)| < 1$ pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$.

Donc pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_X(\theta)^n = 0$.

Par convergence dominée (par la fonction constante 1), $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0$.

6) a) On a $S_n(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) - S_{n-1}(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} = \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

Pour x fixé, $\frac{2x}{x^2 - n^2} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (car la série associée converge).

Et on a donc $\forall x \in \Delta$, $S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

b) Comme S est impaire, il suffit de prouver la continuité sur $\mathbb{R}^+ \cap \Delta$.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}^+ \cap \Delta$. Pour $n > b$, $\sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{2x}{x^2 - n^2} \right| \leq \frac{2b}{n^2 - b^2} = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Donc la série de fonctions $x \mapsto \sum \frac{2x}{x^2 - n^2}$ converge normalement sur $[a, b]$.

On en déduit que S est continue sur $\mathbb{R}^+ \cap \Delta$, donc sur Δ .

c) On a $S_n(x+1) - S_n(x) = \frac{1}{x+1+n} - \frac{1}{x-n}$, donc par passage à la limite, $S(x+1) - S(x) = 0$.

d) On a $S(x) = \frac{1}{x} + R(x)$, où $R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

Par cv normale de la série de fonctions comme au b), R est définie et continue sur $] -1, 1[$.

Donc $S(x) = \frac{1}{x} + O(1)$ lorsque $x \rightarrow 0$, donc $S(x) \sim \frac{1}{x}$.

7) a) $\sum |b_n| x^n$ est une série entière de rayon R .

La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| x^n$ est donc a fortiori continue sur $] -R, R[$, et vaut 0 en $x = 0$.

Donc il existe $\lambda > 0$ assez petit tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \lambda^n \leq 1$.

b) La propriété est vraie au rang 0. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $(n-1)$.

Alors $|a_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k b_{n-k}| \leq \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k} |b_{n-k}| \leq \frac{1}{\lambda^n} \sum_{j=0}^{+\infty} |b_j| \lambda^j \leq \frac{1}{\lambda^n}$.

On en déduit alors $\sum a_n x^n$ est de rayon $R' \geq \lambda > 0$.

c) Pour $|x| < \rho = \min(R, R')$, on a par produit de Cauchy, $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) x^n$.

Or, par définition de a_n , on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$ et $a_0 b_0 = 1$.

d) Par c), on a $\forall x \in] -\rho, \rho[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

8) a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |a_n| |z_0|^{n-k} |z|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|z_0| + |z|)^n < +\infty$, car $|z_0| + |z| < R$.

b) Soit z tel que $|z| < R - |z_0|$. Posons $b_{n,k} = \binom{n}{k} z_0^{n-k} z^k$ pour $k \leq n$ et $b_{n,k} = 0$ sinon.

Par a), la famille $(b_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, car $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |a_n| |z_0|^{n-k} |z|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |b_{n,k}|$.

Par Fubini, on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} b_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,k}$.

Or, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} b_{n,k}$.

Donc $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$, avec $b_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_0^{n-k}$.

On en déduit que g est DSE de rayon $R_0 \geq R - |z_0| > 0$.