

Interrogation n°14. Barème sur 23.5 pts

1) [0.5 pt] Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall t \in [0, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.

Donner sans le justifier un argument (du cours) prouvant que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

On pose $\forall t \in [0, 1[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

2) Les deux questions sont indépendantes.

a) [1 pt] En utilisant les DSE, montrer que $\forall x \in [0, +\infty[, \operatorname{ch}(x) \leq \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$.

b) [1.5 pt] Donner sans justification le DSE de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ et son rayon R de convergence.

3) [2 pts] On note R_0 et R_1 les rayons de convergence respectifs de $\sum a_{2n}z^n$ et $\sum a_{2n+1}z^n$.

Exprimer à l'aide de R_0 et R_1 le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$. Justifier votre réponse.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n dt$. On admet que $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) [0.5 pt] Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, en justifiant brièvement votre réponse.

b) [1.5 pt] La série $\sum a_n x^n$ converge-t-elle lorsque $x = R$? lorsque $x = -R$?

c) [1.5 pt] Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer avec soin que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos(t)} dt$.

5) a) [1.5 pt] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pose $\phi_X(\theta) = E(e^{i\theta X})$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, a_k = P(X = k)$.

Montrer que $e^{i\theta X}$ est d'espérance finie et que $\forall k \in \mathbb{Z}, a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(\theta) e^{-ik\theta} d\theta$.

Remarque : Les théorèmes sur les séries de fonctions sont valables pour les séries indexées par $\mathbb{Z}$.

b) [1 pt] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires entières indépendantes et de même loi que X .

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, P(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(\theta)^n e^{-ik\theta} d\theta$.

c) [2 pts] On suppose $a_0 > 0$ et $a_1 > 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = 0$.

6) On pose $\Delta = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Delta, S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x - k}$.

a) [1 pt] Montrer que pour tout $x \in \Delta, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On pose $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$.

b) [2 pts] Montrer que S est continue sur Δ .

Remarque : Vu une certaine propriété de S , on pourra se limiter à $\mathbb{R}^+ \cap \Delta$.

c) [1 pt] Montrer que S est périodique de période 1.

d) [1 pt] Montrer que $S(x) \sim \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0 dans Δ .

7) Soit $g :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par une série entière : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, avec $\boxed{R > 0}$.

On suppose de plus que $\boxed{b_0 = 1}$.

a) [1 pt] Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \lambda^n \leq 1$.

b) [1 pt] On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{n-k}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \frac{1}{\lambda^n}$. Qu'en déduire quant au rayon de convergence R' de la série entière $\sum a_n x^n$?

c) [1.5 pt] En déduire qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\forall x \in]-\rho, \rho[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = 1$.

d) [0.5 pt] En déduire que $f : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est définie au voisinage en 0 et que f est DSE en 0.

8) [1.5 pt] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Soit z_0 tel que $|z_0| < R$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R - |z_0|$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |a_n| |z_0|^{n-k} |z|^k \right)$ converge.

b) On considère $g(z) = f(z_0 + z)$.

En utilisant les propriétés sur les familles sommables, montrer que g est DSE au voisinage de $z = 0$.