

Interrogation n°13. Corrigé

1) Pour tout $x \geq 0$, la suite $n \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est décroissante, positive et converge vers 0.

L'existence de $f(x)$ résulte donc du critère spécial des séries alternées.

Le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ vérifie $|R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \leq \frac{x}{n}$, car $\ln(1+u) \leq u$.

Donc sur tout segment $[0, a]$, $|R_n(x)| \leq \frac{a}{n}$. On en déduit que la série converge uniformément sur $[0, a]$.

On en déduit que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2) $\exp(tX)$ est bornée donc d'espérance finie. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = x_n)$.

Par le théorème du transfert, on a $L(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(tx_n)$. Posons $f_n(t) = a_n \exp(tx_n)$.

On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_n^{(p)}(t) = a_n x_n^p \exp(tx_n)$.

Soit $\rho > 0$. On a $\forall t \in [-\rho, \rho]$, $|a_n x_n^p \exp(tx_n)| \leq a_n \rho^p \exp(\rho r) = O(a_n)$.

La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment $[-\rho, \rho]$.

On en déduit que L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $L^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^p \exp(tx_n)$.

En particulier, $L^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^p = E(X^p)$.

3) a) On a $E(Z_k) = 0$ et $V(Z_k) = 1$, donc $E(X) = 0$ (par linéarité) et $V(X) = n$ (car les Z_k sont non corrélées).

On a $P(X = n - 2k) = 2^{-n} \binom{n}{k}$.

b) $\sum_{k=0}^n (n - 2k)^2 \binom{n}{k} = 2^n \sum_{k=0}^n (n - 2k)^2 P(X = n - 2k) = 2^n E(X^2) = 2^n V(X) = n2^n$.

4) a) On a $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0) = P(X_n = X_{n-1} \mid X_{n-1} = 0) = P(X_n = X_{n-1})$ car $X_n = X_{n-1}$ et X_{n-1} indépendants.

Donc $P(X_n = 0 \mid X_{n-1} = 0) = q$. D'où $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 0) = 1 - q = p$.

On en déduit que X_n et X_{n-1} ne sont pas indépendantes (sauf dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$).

b) $P(X_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_n) = P(X_0 = X_1, X_1 = X_2, \dots, X_{n-1} = X_n)$.

Comme les événements $(X_i = X_{i-1})$ sont mutuellement indépendants, alors $s_n = q^n$.

c) Le nombre de modifications suit une loi binomiale de paramètre p , donc $r_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

d) $X_0 = X_n$ ssi le nombre de modifications est pair, donc $T = \sum_{k \text{ pair}} r_{n,k}$.

Or, $(p+q)^n + (p-q)^n = 2 \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, donc $T = \frac{1}{2}((p+q)^n + (p-q)^n) = \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T = \frac{1}{2}$ (puisque $|1-2p| < 1$).

Remarque : On peut aussi résoudre d) en reconnaissant une chaîne de Markov de matrice de transition $A = \begin{pmatrix} q & p \\ p & q \end{pmatrix}$ de valeurs propres $\lambda = p+q = 1$ et $\mu = p-q \in]-1, 1[$.

5) Montrons que $P(S = j \mid N = n+1) = \left(\frac{j}{m}\right) P(S = j \mid N = n) + \left(1 - \frac{j-1}{m}\right) P(S = j-1 \mid N = n)$.

En effet : on note $S_n = \text{card}\{X_1, \dots, X_n\}$.

On a $P(S = j \mid N = n) = P(S_n = j \mid N = n) = P(S_n = j)$ car S_n est indépendante de N .

On cherche donc à exprimer $P(S_{n+1} = j)$ en fonction de $P(S_n = j)$ et $P(S_n = j-1)$.

Si $S_{n+1} = j$, alors nécessairement S_n vaut j ou $(j-1)$. donc par la formule des probabilités totales :

Or, $P(S_{n+1} = j) = P(S_{n+1} = j \mid S_n = j) P(S_n = j) + P(S_{n+1} = j \mid S_n = j-1) P(S_n = j-1)$.

Or, $P(S_{n+1} = j \mid S_n = j) = P(X_{n+1} \in \{X_1, \dots, X_n\} \mid S_n = j) = \frac{j}{m}$.

Et $P(S_{n+1} = j \mid S_n = j - 1) = P(X_{k+1} \notin \{X_1, \dots, X_n\} \mid S_n = j - 1) = 1 - \frac{j-1}{n}$.

6) a) $(Y \geq t) = \bigcup_{k=1}^n (X_k \geq t)$, donc $P(Y \geq t) \leq \sum_{k=1}^n P(X_k \geq t)$.

Or, par Markov, $P(X_k \geq t) \leq \frac{E(X_k)}{t}$, donc $P(Y \geq t) \leq \frac{nE(X)}{t}$.

Donc $P(Y < t) \geq 1 - \frac{nE(X)}{t}$.

b) $(Y < t) = \bigcap_{k=1}^n (X_k < t)$, donc par indépendance, $P(Y < t) \leq \prod_{k=1}^n P(X_k < t)$.

Or, $P(X_k \geq t) \geq 1 - \frac{E(X)}{t} \geq 0$ (car $t > E(X)$), donc $P(Y < t) \leq \left(1 - \frac{E(X)}{t}\right)^n$.

7) M est diagonalisable ssi $X = 0$ ou $X \neq XY$, donc ssi $X = 0$ ou $(X \neq 0 \text{ et } Y = -1)$.

Comme les v.a. sont indépendantes et les événements disjoints, $p = e^{-\lambda} + \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\lambda})$.

Variante : M n'est pas diagonalisable ssi $X \neq 0$ et $Y = 1$, donc $1 - p = \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda})$.

8) a) (i) On prend X de loi $\mathcal{B}(r)$, car $((q + pz)^r)^k = (q + pz)^{rk}$.

On peut aussi le prouver en utiliser Y de même loi qu'une somme de kr v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ indépendantes, et qu'on regroupe par paquets de r variables aléatoires.

(ii) On prend X de loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{k}\right)$.

b) Supposons par l'absurde qu'il existe $x \notin \left[-\frac{A}{k}, \frac{A}{k}\right]$ tel que $P(X = x) > 0$.

Alors $P(Y = kA) \geq P(X_1 = x, \dots, X_k = x) = P(X = x)^k > 0$, ce qui contredit $P(Y \in [-A, A]) = 1$.

On a donc $V(Y) = kV(X) \leq kE(X^2) \leq k\left(\frac{A}{k}\right)^2 = \frac{A^2}{k}$.

c) Supposons Y bornée : il existe A tel que $P(Y \in [-A, A]) = 1$.

Par b), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $V(Y) \leq \frac{A^2}{k}$, donc $V(Y) = 0$. Autrement dit, Y est presque sûrement constante.

9) a) Par Markov, $P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{E(Y_n^4)}{\varepsilon^4} = \frac{E(S_n^4)}{n^4 \varepsilon^4}$. Donc $P(|Y_n| > \varepsilon) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) $\overline{A_{\varepsilon,n}} = \bigcup_{k \geq n} (|Y_n| > \varepsilon)$, donc $P(\overline{A_{\varepsilon,n}}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(|Y_n| > \varepsilon)$.

Comme $P(|Y_n| > \varepsilon) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors la série converge et le reste tend vers 0.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_{\varepsilon,n}}) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_{\varepsilon,n}) = 1$.

c) On a $E(S_n^4) = \sum_{i,j,k,l} E(X_i X_j X_k X_l)$.

On a $E(X_i X_j X_k X_l) = 0$ dès que l'un des i, j, k, l est distinct de tous les autres. Il reste donc :

- les cas où ils sont tous égaux : n possibilités

- les cas où (i, j, k, l) est constitué de deux paires d'éléments distincts: il y a $\binom{n}{2} \binom{4}{2}$ possibilités : on choisit les deux éléments distincts, puis les deux positions du plus petit d'entre eux.

Donc $E(S_n^4) = nE(X^4) + \binom{n}{2} \binom{4}{2} E(X^2)^2 = O(n^2)$.

d) On a $B = \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} A_{p,n}$.

$(A_{p,n})_{n \geq 1}$ est croissante, alors par continuité croissante $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_{p,n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_{p,n}) = 1$.

Par continuité décroissante, on a donc aussi $P(B) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_{p,n}\right) = 1$.

Donc presque sûrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0$.