

Interrogation n°13. Barème sur 24 pts

1) [2 pts] Démontrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2) [2 pts] Soit $X : \Omega \rightarrow E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset [-r, r] \subset \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle **bornée**.

Montrer que $L : t \mapsto E(\exp(tX))$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que $\forall p \in \mathbb{N}, L^{(p)}(0) = E(X^p)$.

3) a) [1 pt] Soit $X = \sum_{k=1}^n Z_k$ somme de n variables indépendantes de loi de Rademacher, c'est-à-dire

$$P(Z_k = 1) = P(Z_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Donner sans justification $E(X)$ et $V(X)$, et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donner $P(X = n - 2k)$.

b) [1 pt] En déduire la valeur de $s = \sum_{k=0}^n (n - 2k)^2 \binom{n}{k}$.

4) Soit p un réel vérifiant $\boxed{0 < p < 1}$. On pose $q = 1 - p$.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où chaque X_n est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n \neq X_{n-1}) = p \text{ et } P(X_n = X_{n-1}) = q$$

On suppose de plus que

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X_n = X_{n-1})$ est indépendant de X_{n-1}

- les événements $(X_n = X_{n-1})$ sont mutuellement indépendants.

a) [1.5 pt] Calculer $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 1)$ et $P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 0)$.

Les v.a. X_n et X_{n-1} sont-elles indépendantes ?

b) [1 pt] Déterminer la probabilité s_n pour que $X_0 = X_1 = X_2 = \dots = X_n$.

c) [1 pt] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Donner *sans justification* la probabilité $r_{k,n}$ pour qu'il existe exactement k modifications,

c'est-à-dire pour qu'il existe exactement k valeurs de $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour lesquelles $X_i \neq X_{i-1}$.

d) [1.5 pt] En déduire (à l'aide d'une somme) la probabilité t_n pour que $X_n = X_0$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$?

Remarque : On fera intervenir $(p + q)^n + (p - q)^n$.

5) [2 pts] Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On considère des v.a. indépendantes $X_1, X_2, \dots$, de loi uniforme à valeurs dans $\Omega = \{1, 2, \dots, m\}$.

On pose $S = \text{card}\{X_1, \dots, X_N\}$. Soient $j \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exprimer $P(S = j \mid N = n + 1)$ en fonction de $P(S = j \mid N = n)$ et de $P(S = j - 1 \mid N = n)$.

6) [2 pts] Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. réelles positives de même loi que $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$.

On suppose que X est d'espérance finie. On considère $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $t > E(X)$.

a) Montrer que $P(Y < t) \geq 1 - \frac{nE(X)}{t}$.

b) On suppose les X_k indépendantes. Montrer que $P(Y < t) \geq \left(1 - \frac{E(X)}{t}\right)^n$.

7) [1.5 pt] Soient X et Y deux v.a. indépendantes, avec X de loi de Poisson $P(\lambda)$ et Y de loi de Rademacher.

Calculer la probabilité p pour que $M = \begin{pmatrix} X & X \\ 0 & XY \end{pmatrix}$ soit diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

8) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire Y est k -divisible ssi il existe des v.a. $X_1, \dots, X_k$ indépendantes et de même loi que X telles que $Y \sim X_1 + \dots + X_k$.

a) [1.5 pt] Justifier brièvement que si Y est k -divisible dans chacun des cas suivants :

(i) Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(kr, p)$, où $r \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Y suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

b) [1.5 pt] On suppose Y est k -divisible et qu'il existe $A > 0$ tel que $P(Y \in [-A, A]) = 1$.

Montrer que $P\left(X \in \left[-\frac{A}{k}, \frac{A}{k}\right]\right) = 1$. En déduire que $V(Y) \leq \frac{A^2}{k}$.

c) [1 pt] On dit que Y est infiniment divisible ssi Y est k -divisible pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer les v.a. infiniment divisibles et presque sûrement bornées.

9) On considère un espace probabilisé (Ω, P) et une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. réelles indépendantes de même loi que X , et on suppose que X est d'espérance nulle et de moment d'ordre 4 fini.

Ainsi, $E(X) = 0$ et $E(X^4) < +\infty$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \frac{1}{n} S_n$. On admet provisoirement que $E(S_n^4) = O_{+\infty}(n^2)$.

a) [1 pt] Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P(|Y_n| > \varepsilon) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) [1 pt] On pose $A_{\varepsilon, n} = \{\omega \in \Omega \mid \forall k \geq n, |Y_k(\omega)| \leq \varepsilon\}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_{\varepsilon, n}) = 1$.

Indication : Faire intervenir $\overline{A_{\varepsilon, n}}$ et l'union des événements $(|Y_k| > \varepsilon)$, avec $k \geq n$.

c) [1 pt] Montrer la propriété admise : $E(S_n^4) = O(n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) [0.5 pt] On pose $B = \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, |Y_k(\omega)| \leq \frac{1}{p} \right\}$.

Exprimer B en fonction des $A_{1/p, n}$, qu'on notera $A_{p, n}$ pour alléger.

En déduire que presque sûrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ (appelée loi forte des grands nombres).