

Interrogation n°12. Barème sur 24 pts

1) [1.5 pt] Soient des événements A , C et B_n , avec $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\Omega = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ (union disjointe).

Montrer que $P(A \mid C) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A \mid B_n \cap C)P(B_n \mid C)$.

Remarque : On suppose ici les $B_n \cap C$ non négligeables.

2) [1 pt] Soit X une variable aléatoire réelle de moment d'ordre 2 fini.

En utilisant $1_{X \neq 0}$, montrer que $E(|X|)^2 \leq P(X \neq 0)E(X^2)$.

3) [1.5 pt] Soient X , Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes, et de même loi.

Calculer $\text{Cov}(XY, Z)$ et $\text{Cov}(XY, XZ)$ en fonction de $E(X)$ et $E(X^2)$ qu'on suppose existés.

4) [2.5 pts] On considère n paires distinctes de chaussettes mélangées dans un tiroir.

On numérote les paires de 1 à n .

On tire aléatoirement n chaussettes, soit exactement la moitié des chaussettes présentes.

a) Déterminer la probabilité p pour que les deux chaussettes de la paire numéro 1 aient été tirées.

b) On note N le nombre de paires complètes dans le lot tiré. Calculer $E(N)$.

5) Soient des v.a. entières N et Z_n , avec $n \in \mathbb{N}$, mutuellement indépendantes.

On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

On suppose que les Z_n suivent une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 \leq p \leq 1$. On pose $q = 1 - p$.

On considère $X = \sum_{i=1}^N Z_i$ et $Y = N - X$.

a) [1 pt] Montrer que X est une variable aléatoire.

Remarque : On sait par le cours que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ est une variable aléatoire.

b) [1 pt] Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-p\lambda}$$

On pourra faire intervenir $m = n - k$.

c) [1.5 pt] En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre $\mathcal{P}(\lambda p)$.

d) [1 pt] Déterminer sans calcul la loi de Y .

e) *Question hors-interrogation :* Montrer que X et Y sont indépendantes.

6) On considère le polynôme $P(t) = \left(\frac{1+t+t^2}{3} \right)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k$.

a) [0.5 pt] La famille $(a_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est la loi d'une somme $S = X_1 + \dots + X_n$ de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi. Préciser *sans justification* la loi des X_k .

b) [1 pt] Calculer $E(S)$ et $V(S)$, et en déduire sans justification la valeur de $\omega = \sum_{k=0}^{2n} (k-n)^2 a_k$.

c) [1 pt] Soit $0 < \varepsilon < 1$. On considère Δ l'ensemble des entiers compris entre $(1-\varepsilon)n$ et $(1+\varepsilon)n$.

7) [1.5 pt] Soient X et $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ deux v.a. à valeurs entières, indépendantes et de même loi.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = n) = P(Y = n)$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

En évaluant $P(X > Y)$ et $P(X = Y)$, montrer sans calcul que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 \right)$$

8) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes (mais de paramètre variable).

On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

a) [1 pt] On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer $\mu_n = E(S_n)$ et montrer que $V(S_n) = O_{+\infty}(\mu_n)$.

b) [1.5 pt] Soient $a < 1 < b$.

En posant $\varepsilon = \min(a-1, b-1)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a\mu_n < S_n < b\mu_n) = 1$.

c) [1 pt] On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Justifier que $P(N > n) = \frac{1}{n+1}$. En déduire que $P(N < +\infty) = 1$ et que N n'est pas d'espérance finie.

9) a) [2 pts] Soient $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires de moments d'ordre 2 finis.

On suppose que les X_i ont même loi que X et que les Y_i ont même loi que Y . On suppose de plus que $E(X) = 0$ et que chaque variable X_i est indépendante des autres, c'est-à-dire de $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$.

Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$.

Montrer que $Z = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i Y_i$ est de moment d'ordre 2 fini et que $E(Z^2) = nE(X^2)E(Y^2)$.

b) [1.5 pt] Soit $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de v.a. indépendantes de même loi, avec $E(X_{ij}^2) = 1$ et $E(X_{ij}) = 0$.

On considère la variable aléatoire D_n donnant la valeur du déterminant de la matrice $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

On a $D_0 = 1$. En raisonnant par récurrence, montrer que $E((D_n)^2) = n!$

10) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes.

On suppose que Y et Z suivent des lois de Rademacher, c'est-à-dire $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

a) [1 pt] On suppose que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire pour tout réel x ,

$$P(X = x) = P(X = -x)$$

Montrer que que XY et XZ ont même loi que X .

b) [1 pt] On suppose que X suit une loi de Rademacher. Montrer que XY et XZ sont indépendantes.