

Interrogation n°11. Corrigé

1) On a $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 < +\infty$, donc la famille est sommable.

En regroupant les termes, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \right) = \sum_{n \text{ impair}}^{+\infty} \frac{-1}{2^n} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1-1/4} = -\frac{2}{3}$.

Variante : $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{-1}{1+1/2} = -\frac{2}{3}$.

2) a) $P(d \text{ divise } X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(dq)^2} = \frac{1}{d^2}$.

b) Par additivité, on a : $p = P(X \text{ et } Y \text{ pairs}) + P(X \text{ et } Y \text{ impairs})$.

Comme X et Y sont indépendants, on obtient : $p = P(X \text{ pair})^2 + P(X \text{ impair})^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$.

c) On considère une famille FINIE $(p_1, \dots, p_n)$ de nombres premiers distincts.

Posons $A_k : p_k \text{ divise } X$. On a $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ssi $m = p_1 \dots p_n$ divise X .

On a $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(m \text{ divise } X) = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{p_1^2 \dots p_n^2} = P(A_1) \dots P(A_n)$.

Donc les événements $(p_n \text{ divise } X)$ sont mutuellement indépendants.

d) On a $B = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \{1\}$, car 1 est tout entier $n \geq 2$ admet (au moins) un diviseur $p \in \mathcal{P}$.

Par continuité décroissante, $P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_{p_k}}\right)$.

Par indépendance des $\overline{A_p}$, on a $P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_{p_k}}\right) = \prod_{k=1}^n P(\overline{A_{p_k}})$.

Donc $P(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n P(\overline{A_{p_k}})$, c'est-à-dire $P(B) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$. Or, $P(B) = P(\{1\}) = \frac{1}{\lambda} = \frac{6}{\pi^2}$.

3) a) On a $\langle X, (A+B)X \rangle = \langle X, AX \rangle + \langle X, BX \rangle \geq 0$.

b) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle X, P^T A P X \rangle = \langle P X, A P X \rangle = \langle Y, A Y \rangle \geq 0$. Donc $P^T A P$ est positive.

c) Première preuve : On applique b) en prenant $P = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Seconde preuve :

On a $(X | B X) = \sum_i \sum_j b_{ij} x_i x_j = \sum_i \sum_j a_{ij} \mu_i \mu_j x_i x_j = \sum_i \sum_j a_{ij} (\mu_i x_i) (\mu_j x_j) = (Y | A Y) \geq 0$, avec $y_i = \mu_i x_i$.

d) Supposons (i).

Par le th spectral, A s'écrit $U D U^{-1} = U D U^T$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et $\lambda_i \geq 0$.

On a $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}$. Donc $D = \sum_{i=1}^n (\mu_i E_i) (\mu_i E_i)^T$, avec $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Avec $Z_i = \mu_i U E_i$, on obtient donc bien $A = \sum_{k=1}^n Z_k Z_k^T$.

Supposons (ii) : A est symétrique comme somme des matrices symétriques $Z_k Z_k^T$.

Par a), il suffit donc de prouver que ZZ^T est positive. Or, $(X | ZZ^T X) = \|Z^T X\|^2 \geq 0$.

e) On sait par d) que B s'écrit $\sum_{k=1}^n Z_k Z_k^T$.

Dans le cas où $B = ZZ^T$, on a $b_{ij} = \mu_i \mu_j$, donc par b), la matrice $C = (a_{ij} \mu_i \mu_j)$ est positive.

Dans le cas général, $B = \sum_{k=1}^p Z_k Z_k^T$.

Donc C est la somme des matrices $C_k = (a_{ij} \lambda_i^{(k)} \lambda_j^{(k)})$, où les $\lambda_i^{(k)}$ sont les coefficients du vecteur Z_k .

Ainsi, C est positive par c) comme somme de matrices positives.

4) a) On considère $f : O_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow O_n^-(\mathbb{R})$ $U = (U_1, \dots, U_n) \mapsto V = (U_1, \dots, U_{n-1}, -U_n)$.

On a bien $(V_1, \dots, V_n)$ base orthonormée et $\det V = -\det U = -1$.

Enfin, f est bijective, car tout $V \in O_n^-(\mathbb{R})$ admet $U = (V_1, \dots, V_{n-1}, -V_n) \in O_n^+(\mathbb{R})$ comme unique antécédent.

b) ($\Rightarrow$) Si A est symétrique, alors par le th spectral A est orthosemblable à une matrice diagonale : il existe $U = (U_1, \dots, U_n) \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $U^{-1}AU = D$.

Ainsi, $(U_1, \dots, U_n)$ est une BON de vecteurs propres. Si $U_n \in E_\lambda$, on a $-U_n \in E_\lambda$.

Donc $(V_1, \dots, V_n)$ défini au a) est aussi une BON de vecteurs propres et vérifie donc $V^{-1}AV = D$.

D'où le résultat, car U ou V appartient à $O_n^+(\mathbb{R})$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si D diagonale et $U \in O_n^+(\mathbb{R})$, la matrice $A = UDU^{-1} = UDU^T$ est bien symétrique.

5) a) On a $(X | AX) = \frac{1}{2}(X | UX) + \frac{1}{2}(X | U^T X) = (X | UX)$.

Par Cauchy-Schwarz, $|(X | UX)| \leq \|X\| \|UX\| = \|X\|^2$, car U conserve la norme : $\|UX\| = \|X\|$

b) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $AX = \lambda X$.

Par a), $|(X | AX)| \leq \|X\|^2$, donc $|\lambda| \|X\|^2 \leq \|X\|^2$, et comme X n'est pas nul, $|\lambda| \leq 1$.

6) a) $A = A^T$, donc A est symétrique réelle et donc orthodagonalisable.

$A^2 = A$, donc A est une projection. On en déduit que A est une projection orthogonale, d'où le résultat.

b) On a $\sum_{j=1}^n \|A_j\|^2 = \sum_{j=1}^n (A_j | A_j) = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(J_r^2) = \text{tr}(J_r) = r$.

7) On a $b \in \text{Im } u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. Posons $b = \sum_{j=1}^r \alpha_j e_j$ et $a = \sum_{j=1}^r \frac{\alpha_j}{\lambda_j} e_j$.

On a $u(a) = b$, donc $\Delta = a + \text{Ker } u = a + \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Comme $a \in \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)^\perp$, alors par Pythagore, a est l'unique vecteur de Δ dont la norme est minimale.

8) a) On a $P(\theta)$ symétrique réelle donc diagonalisable.

De plus, $\det P(\theta) = 0$. Donc $\text{Sp}(P(\theta)) = \{0, \text{tr } P(\theta)\} = \{0, 1\}$

On en déduit que f_θ est une projection orthogonale.

Remarque : Avec $Z = (\cos \theta, \sin \theta)$, on a $P(\theta) = ZZ^T$ et $f(X) = (Z | X)Z$ projection orthogonale sur $\mathbb{R}Z$.

b) On a bien $(1 + |\cos \theta|) + (1 - |\cos \theta|) = 2 = \text{tr } M(\theta)$ et $(1 + |\cos \theta|)(1 - |\cos \theta|) = (\sin \theta)^2 = \det M(\theta)$.

On a $\lambda(\theta) + \mu(\theta) = 2$, donc Δ est inclus dans la droite $x + y = 2$.

Or, $\lambda(\theta)$ décrit $[1, 2]$. On en déduit que Δ est le segment d'extrémités $(1, 1)$ et $(2, 0)$.

c) Lorsqu'on considère deux projections orthogonales sur des droites, on peut toujours trouver une BON où les matrices de ces deux projections sont respectivement $P(0)$ et $P(\theta)$.

En effet, on choisit une BON de diagonalisation pour la première donnant $P(0)$, et pour la seconde, on note que la matrice $P(\theta)$ est égale à $UP(0)U^{-1}$, où U est la matrice de rotation d'angle θ .