

Interrogation n°11. Barème sur 24 pts

1) [2 pts] On pose Δ l'ensemble des couples $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leq k \leq n$.

Montrer que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{2^n} \right)_{(k,n) \in \Delta}$ est sommable et calculer $S = \sum_{(k,n) \in \Delta} \frac{(-1)^k}{2^n}$.

2) On considère une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ de loi définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{n^2}, \text{ où } \lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a) [0.5 pt] Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère l'événement $A_d : (d \text{ divise } X)$. Montrer que $P(A_d) = \frac{1}{d^2}$.

b) [1.5 pt] On considère une autre v.a. Y de même loi que X , et on suppose X et Y indépendantes.

Donner la probabilité p pour que X et Y aient la même parité (c'est-à-dire qu'ils soient congrus modulo 2).

c) [1.5 pt] On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose $\mathcal{P} = \{p_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrer que les événements A_p , où $p \in \mathcal{P}$, sont mutuellement indépendants.

d) [1.5 pt] En considérant $B = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$, montrer que $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$.

Remarque : $\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ désigne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right)$.

3) On note $(X | Y) = X^T Y$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

a) [0.5 pt] Soient A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques positives.

Montrer que $A + B$ est (symétrique) positive.

b) [1 pt] Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.

Montrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $B = P^T A P$ est positive.

c) [1.5 pt] Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels.

On pose $b_{ij} = a_{ij} \mu_i \mu_j$. Montrer que B est (symétrique) positive.

d) [2 pts] Montrer qu'une matrice A est symétrique positive ssi elle peut s'écrire comme somme de matrices de la forme ZZ^T , avec $Z \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, il s'agit de prouver l'équivalence des deux assertions :

(i) A est *symétrique positive*

(ii) il existe dans $\mathbb{R}^n$ des vecteurs $Z_1, \dots, Z_p$ tels que $A = \sum_{k=1}^p Z_k Z_k^T$.

e) [1.5 pt] (★) Soient A et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices *symétriques positives*. On pose $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$.

En utilisant les questions précédentes, montrer que C est positive.

4) a) [0.5 pt] Expliciter *sans justification* une bijection $f : O_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow O_n^-(\mathbb{R})$.

Remarque : On pourra poser $U = (U_1, \dots, U_n)$, où les U_j sont les colonnes de U .

b) [2 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *directement orthosemblable* à une matrice B ssi il existe une matrice de rotation $U \in O_n^+(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1} A U = B$.

Montrer que A est symétrique ssi elle est *directement orthosemblable* à une matrice diagonale.

5) [2 pts] Soit $U \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice *orthogonale*. On pose $A = \frac{1}{2}(U + U^T) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On munit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Que vaut $\|UX\|$? En déduire que $\forall X \in \mathbb{R}^n, |(X | AX)| \leq \|X\|^2$.

b) Justifier que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) \subset [-1, 1]$.

6) [2 pts] Soit $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A = A^T$. On pose $r = \text{rg } A$.

a) Justifier que A est ortho-semblable à la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O_{n-r} \end{array} \right)$.

Rappel : A est orthosemblable à J_r ssi il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1}AU = J_r$.

b) En considérant $A^T A$, montrer que $\sum_{j=1}^n \|A_j\|^2 = r$.

7) [1.5 pt] Soit $u \in S(E)$ un endomorphisme symétrique.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$ ses valeurs propres, répétées avec multiplicité (on a en particulier $\lambda_j \neq 0$).

Soit $b \in \text{Im } u$. On considère $\Delta = \{x \in E \mid u(x) = b\}$.

a) En considérant une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de u , expliciter Δ .

Remarque : On fera intervenir les coordonnées de b dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que Δ admet un unique vecteur de norme minimale.

8) a) [1 pt] On pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On note $f_\theta : X \mapsto P(\theta)X$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du psc) canoniquement associé à $P(\theta)$.

Justifier que f_θ est une projection orthogonale.

b) [1.5 pt] On considère $M(\theta) = P(0) + P(\theta) = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.

On note $\lambda(\theta)$ et $\mu(\theta)$ les valeurs propres de $M(\theta)$, avec $\lambda(\theta) \geq \mu(\theta)$.

Vérifier (sans calculs) que $\lambda(\theta) = 1 + |\cos \theta|$ et $\mu(\theta) = 1 - |\cos \theta|$.

Représenter dans le plan l'ensemble Δ des couples $(\lambda(\theta), \mu(\theta))$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

c) *Question supplémentaire*

On considère l'ensemble Δ des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A = A^T$ et $\text{rg } A = 1$.

Soient A et $B \in \Delta$. Montrer qu'il existe θ tel que $M = A + B$ est orthosemblable à $M(\theta)$.