

Interrogation n°10. Corrigé

1) Par Cauchy-Schwarz, $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| = \|x\|$. Lorsque $x \neq \vec{0}$, il y a égalité pour $y = \frac{x}{\|x\|} \in S$.

On en déduit que dans tous les cas $m = \|x\|$.

2) On définit $(e_1, \dots, e_n)$ par récurrence forte : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i \rangle e_i$ et $e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|}$.

Remarque : En particulier, $b_1 = a_1$.

3) a) On a $s = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \langle e_i, f_j \rangle^2 \right) = \sum_{j=1}^p \|f_j\|^2 = p$.

b) On sait que $d(e_i, F) = \|y\|$, où $y = \sum_{j=1}^p \langle e_i, f_j \rangle f_j$ projeté orthogonal de e_i sur $F^\perp = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Donc $d(e_j, F)^2 = \sum_{i=1}^p \langle e_i, f_j \rangle^2$, et ainsi par a), $\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = p$.

La valeur moyenne des $d(e_i, F)^2$ vaut $\frac{p}{n}$, donc il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $d(e_i, F)^2 \leq \frac{p}{n}$.

4) a) Résulte de $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

b) Il s'agit de prouver que pour tous x et $y \in S$, $\|u(x)\| = \|u(y)\|$.

Or, on a $\|x\| = \|y\| = 1$, donc $\langle x + y, x - y \rangle = 0$, donc $\langle u(x + y), u(x - y) \rangle = 0$.

Par linéarité de u , on en déduit $\langle u(x) + u(y), u(x) - u(y) \rangle = 0$, c'est-à-dire $\|u(x)\| = \|u(y)\|$.

c) Pour tout x non nul, on a $\left\| u \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \lambda$, donc $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$, d'où $\|v(x)\| = \|x\|$.

Donc v conserve la norme, c'est-à-dire $v \in O(E)$. *Remarque* : On dit que $u = \lambda v$ est une similitude.

5) a) Soient $(x, y) \in E_1 \times E_{-1}$.

Comme $u \in O(E)$, alors $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, donc $-\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$, c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = 0$.

b) Comme u conserve la norme, alors $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Si u est diagonalisable, alors $E_1 \oplus E_{-1} = E$, et par a), $E_1 \oplus^\perp E_{-1} = E$. Donc u est une symétrie orthogonale.

6) a) (i) équivaut à (ii) car UA_j est la j -ième colonne de UA .

(ii) implique (iii) : Supposons $UA = B$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $B^T B = A^T U^T U A = A^T A$, car $U^T U = I_n$.

(iii) implique (ii) : Supposons $A^T A = B^T B$. Posons $U = BA^{-1}$. On a bien $UA = B$.

Il suffit de prouver que $U \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, on a $U^T U = (A^T)^{-1} (B^T B) (A)^{-1} = (A^T)^{-1} (A^T A) (A)^{-1} = I_n$.

Remarque : La propriété reste vraie pour A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais la propriété est plus difficile à prouver.

7) a) On a : $y \in (\text{Im } A)^\perp$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $(Ax \mid y) = 0$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $(x \mid A^T y) = 0$ ssi $A^T y = 0$.

b) $\|Ax - b\|$ est minimal ssi Ax est le projeté orthogonal de b sur $\text{Im } A$. Donc Δ n'est pas vide.

De plus, on a $x \in \Delta$ ssi $Ax - b \in (\text{Im } A)^\perp$, ssi $A^T(Ax - b) = 0$, ssi $A^T Ax = A^T b$.

De plus, $\Delta = x_0 + \text{Ker}(A^T A) = x_0 + \text{Ker}(A)$.

8) a) L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \quad z \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ est une forme linéaire.

Par le th de représentation des formes linéaires, il existe un unique ω tel que $\forall z \in E, \varphi(z) = \langle \omega, z \rangle$.

b) On a $\forall z \in E, \langle y \wedge x, z \rangle = \det_{\mathcal{B}}(y, x, z) = -\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = -\langle x \wedge y, z \rangle = \langle -x \wedge y, z \rangle$.

Comme z est arbitraire, $y \wedge x = -(x \wedge y)$.

c) Par b), il suffit de prouver la linéarité en x . Soient $x, x', y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a $\forall z \in E, \langle \lambda(x \wedge y) + \mu(x' \wedge y), z \rangle = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x, y, z) + \mu \det_{\mathcal{B}}(x', y, z) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu x', y, z)$.

Donc $\forall z \in E, \langle \lambda(x \wedge y) + \mu(x' \wedge y), z \rangle = \langle (\lambda x + \mu x') \wedge y, z \rangle$.

Comme z est arbitraire, $\lambda(x \wedge y) + \mu(x' \wedge y) = (\lambda x + \mu x') \wedge y$.

9) a) On a matriciellement $f : X \mapsto B(A^T X) = (BA^T)X$, donc $M = BA^T$.

Variante : On a $f(e_j) = \langle a, e_j \rangle b = a_j b$, donc $M = (b_i a_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = BA^T$.

b) On a $\text{Im } f = \mathbb{R}b$, donc $\text{rg } M = 1$. On a aussi le sev propre $E_0 = \text{Ker } f = a^\perp$ hyperplan.

f est une projection ssi 1 est valeur de f , donc ssi $\text{tr } M = 1$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$.

Variante : f est une projection ssi $f(b) = b$, donc ssi $\langle a, b \rangle = 1$.

Autre méthode : On écrit que $f \circ f = f$. On retrouve la CNS : $\langle a, b \rangle = 1$.

c) f projection orthogonale ssi f projection et $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$, donc ssi $\langle a, b \rangle = 1$ et $\mathbb{R}a = \mathbb{R}b$.

Donc f projection orthogonale ssi d'une part a et b colinéaires de même sens et d'autre part $\|a\| \|b\| = 1$.

10) a) Posons $M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On a $M = A^T A$, donc $\text{Gram}(x_1, \dots, x_p) = \det M = (\det A)^2 = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p))^2$.

b) On considère une $\mathcal{B}$ de E . Alors par a), $\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_{n-1}, x)^2$.

Comme $y \in \text{Vect}(a_1, \dots, a_{n-1})$, alors $\det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_{n-1}, x - y)$.

D'où on déduit $\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x - y)$.

c) Posons $z = x - y$. Comme $z \in \text{Vect}(a_1, \dots, a_{n-1})^\perp$, alors on a :

$\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, b_n) = \det \left(\begin{array}{c|c} N & O \\ \hline O & \langle z, z \rangle \end{array} \right)$, où $N = (\langle a_i, a_j \rangle)_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Donc $\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \|z\|^2 \times \text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1})$, et on conclut avec $d(x, H) = \|z\|$.