

Interrogation n°10. Barème sur 23.5 pts

1) [1 pt] Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On note $S = \{y \in E \mid \|y\| = 1\}$ la sphère unité de E . Soit $x \in E$. Calculer $m = \sup_{y \in S} \langle x, y \rangle$.

2) [1.5 pt] Soient E un espace euclidien et $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ une base de E .

On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt.

Donner *sans justification* une définition explicite (récursive) des e_k en fonction des a_k .

Remarque : On pourra faire intervenir des vecteurs $b_1, b_2, \dots, b_n$ comme dans le cours.

3) Soient E un espace euclidien de dimension n .

Soient $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

a) [1 pt] Calculer la somme $s = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p \langle e_i, f_j \rangle^2 \right)$.

b) [2 pts] On pose $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)^\perp$.

Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $d(e_i, F)^2 \leq \frac{p}{n}$.

4) Soient E un espace euclidien. On note S la sphère unité de E , c'est-à-dire $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

a) [1 pt] Montrer que des vecteurs x et y ont même norme *si et seulement si* $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

b) [1.5 pt] Soit u un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité : $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$.

En utilisant a), montrer qu'il existe λ tel que $\forall x \in S, \|u(x)\| = \lambda$.

c) [0.5 pt] On suppose de plus u bijectif, c'est-à-dire $\lambda > 0$. Que dire de l'endomorphisme $v = \lambda^{-1}u$?

5) Soit $u \in O(E)$ une isométrie.

a) [1 pt] Montrer que les sev propres $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $E_{-1} = \text{Ker}(u + \text{Id})$ sont orthogonaux.

b) [1.5 pt] On suppose que $u \in O(E)$ est diagonalisable. En justifiant votre réponse, donner la nature de u .

6) [3 pts] Soient A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ inversibles. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, UA_j = B_j$

(ii) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $UA = B$

(iii) $A^T A = B^T B$.

7) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On sait que $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A^T A) = \text{Im}(A^T)$.

a) [1 pt] Montrer que $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

b) [2 pts] Soit $x \in \mathbb{R}^p$. On pose $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|\}$.

Montrer que Δ n'est pas vide et que : $x \in \Delta$ ssi $A^T A x = A^T b$.

8) Soit E euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

a) [1 pt] Soient x et $y \in E$.

Montrer qu'il existe un unique vecteur ω tel que $\forall z \in E, \langle \omega, z \rangle = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$.

Indication : Utiliser le cours concernant les formes linéaires dans un espace euclidien.

On note $x \wedge y$ ce vecteur.

b) [1 pt] Montrer que $y \wedge x = -(x \wedge y)$.

c) *Question supplémentaire.* Montrer que $f : E \times E \rightarrow E \quad (x, y) \mapsto x \wedge y$ est une application bilinéaire.

9) On considère des vecteurs non nuls a et $b \in E$ espace euclidien.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On considère $f : E \rightarrow E \quad x \mapsto \langle a, x \rangle b$.

a) [1 pt] On note A et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes de a et b dans la base $\mathcal{B}$.

Exprimer en fonction de A et B la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) [1 pt] Donner sans justification une CNS sur a et b pour que f soit une projection.

c) [0.5 pt] Donner sans justification une CNS sur a et b pour que f soit une projection orthogonale.

10) Pour toute famille $(x_1, \dots, x_p)$ d'un espace euclidien, on définit

$$\text{Gram}(x_1, \dots, x_p) = \det M, \text{ où } M = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

a) [0.5 pt] Soit $\mathcal{B}$ une BON de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $\text{Gram}(x_1, \dots, x_p) = (\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p))^2$.

b) [1.5 pt] Soit $H = \text{Vect}(a_1, \dots, a_{n-1})$ un hyperplan d'un espace euclidien E de dimension n .

Soit x un vecteur de E . On définit y le projeté orthogonal de x sur H .

Montrer que $\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x - y)$, et en déduire

$$d(x, H)^2 = \frac{\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1}, x)}{\text{Gram}(a_1, \dots, a_{n-1})}$$