

Interrogation n°9. Corrigé

1) On a $P(X) = \prod_{j=1}^r (X - \mu_j)^{m_j}$, donc $P(A) = \prod_{j=1}^r (A - \mu_j I_n)^{m_j}$.

Un produit de matrices est inversible ssi chaque terme est inversible (cf déterminant par exemple).

Donc $P(A)$ est inversible ssi $\forall j$, $(A - \mu_j I_n)$ inversible donc ssi $\forall j$, $\mu_j \notin \text{Sp}(A)$.

2) On prend par exemple $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, a - d\}$.

On obtient deux matrices triangulaires admettant deux valeurs propres distinctes.

3) A est nilpotente ssi $\text{Sp}(A) = \{0\}$, donc ssi $\chi_A(x) = x^2$, donc ssi $\text{tr } A = \det A = 0$.

4) Supposons par l'absurde que A n'est pas nilpotente. Alors A admet une valeur propre $\lambda \neq 0$.

Comme 2λ est valeur propre de $2A$, alors 2λ est valeur propre de A .

Par récurrence, $2^n \lambda$ est valeur propre de A pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde, car $\text{Sp}(A)$ est fini.

5) a) Le polynôme $P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ est scindé à racines simples.

Donc u est diagonalisable et on a $\text{Sp}(u) \subset \{\lambda, \mu\}$, donc $E_\lambda \oplus E_\mu = E$.

b) On a $p_\lambda = L_\lambda(u)$, où L_λ vérifie $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$. Donc $p_\lambda = \frac{u - \mu \text{Id}}{\lambda - \mu}$.

c) On a $x = p_\lambda(x) + p_\mu(x)$, donc $u^k(x) = \lambda^k p_\lambda(x) + \mu^k p_\mu(x)$.

6) a) Il existe un polynôme $P(X)$ annulateur de M et scindé à racines simples.

On a $P(M) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & * \\ \hline O_n & P(B) \end{array} \right) = O_{2n}$, donc $P(A) = O_n$ et $P(B) = O_n$. Donc A et B sont diagonalisables.

b) $\pi_A(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)$ annule A et $\pi_B(X) = \prod_{\mu \in \text{Sp}(B)} (X - \mu)$ annule B .

Comme $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$, alors $P(X) = \pi_A(X)\pi_B(X)$ est à racines simples.

Et $P(M) = \pi_A(M)\pi_B(M) = \left(\begin{array}{c|c} O_n & * \\ \hline O_n & * \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O_n & O_n \end{array} \right) = O_{2n}$. Donc M est diagonalisable.

Remarque : On a aussi $P(M) = \pi_B(M)\pi_A(M)$, mais le produit matriciel n'est pas aussi évident à voir, car en fait les blocs $*$ ne sont pas indépendants les uns des autres.

7) a) On sait que $u|_F$ est diagonalisable. De plus, les valeurs propres de $u|_F$ sont des valeurs propres de u .

Donc $F = E'_{\lambda_1} \oplus E'_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E'_{\lambda_p}$, où $E'_{\lambda_j} = \{x \in F \mid u(x) = \lambda_j x\} = F \cap E_{\lambda_j}$. D'où le résultat.

b) Par a), tout sev F stable par u est de la forme $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, où F_j est un sev de E_{λ_j} .

La réciproque est immédiate car tout sev de E_{λ_j} est stable par u .

En particulier, lorsque les E_{λ_j} sont des droites, alors $F_j = \{0\}$ ou E_{λ_j} . Il y a donc 2^n sev stables.

8) a) Par Cayley-Hamilton, $\{\deg P \mid P \in \Delta\}$ contient n , donc d existe (partie non vide de $\mathbb{N}$) et $d \leq n$.

b) On considère $P = MQ + R$ la division euclidienne de P par M .

On a $P(u) = R(u)$, car $M(u) = 0$. Donc $P(u) = 0$ ssi $R(u) = 0$.

Comme $\deg R < d$, alors $R(u) = 0$ ssi $R(X)$ est le polynôme nul, c'est-à-dire $M(X)$ divise $P(X)$.

c) Les λ_j sont nécessairement racines de u , donc $\pi = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ divise M .

Mais on sait par le cours que π annule u . Donc M divise π , et ainsi $M = \pi$.

9) Si $u \in \Delta$, alors les sev propres $F = E_1$ et $G = E_0$ sont stables par u . On a $r = \text{rg } p = \dim F$.

Réciproquement, si F et G sont stables par u , alors u commute avec p (car $u|_F$ commute avec Id_F et $u|_G$ commute avec l'endomorphisme nul 0_G). considérons une base $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus G = E$.

On en déduit que $v \in \Delta$ ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right)$, où $A \in \mathcal{M}_r(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$.

On en déduit que $\dim \Delta = \dim \mathcal{M}_r(K) + \dim \mathcal{M}_{n-r}(K) = r^2 + (n-r)^2$.

10) a) On a $\text{tr}(B + I_n) = \text{tr}(B) + n$, donc B et $B + I_n$ ne sont pas semblables.

Variante : Si B et $B + I_n$ étaient semblable et en notant λ une valeur propre de B , alors $\lambda + 1$ est valeur propre de B , donc les $\lambda + k \in \text{Sp}(B)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui contredit $\text{Sp}(B)$ fini.

b) Par a), A n'est pas inversible, donc $\text{Ker } A$ n'est pas nul.

Si $X \in \text{Ker } A$, alors $A(BX) = (B + I_n)AX = 0$, c'est-à-dire $BX \in \text{Ker } A$, donc $\text{Ker } A$ est stable par B .

c) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a$ de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & A' \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} b$ de la forme $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline O & B' \end{array} \right)$.

Comme $AB = (B + I_n)A$, alors $A'B' = (B' + I_n)A'$.

Par hypothèse de récurrence forte sur n , A' est nilpotente. Donc $\chi_{A'}(x) = x^r$, où $r = \dim S = \text{rg } A$.

Donc $\chi_A(x) = x^n$, et ainsi A est nilpotente.

d) On applique l'hypothèse de rec à A' et B' : il existe $Q \in GL_r(\mathbb{C})$ tel que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures. Avec $P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & Q \end{array} \right)$, on a bien $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ triangulaires supérieures.

11) a) Il s'agit de prouver que $(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{n-1})$ est libre. Supposons $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0$.

On a alors a fortiori $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = \vec{0}$. Donc les α_k sont nuls.

b) On a $v(u^k(x)) = u^k(v(x))$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, v est entièrement définie par $(v(u^k(x)))_{0 \leq k < n}$.

Donc v est entièrement défini par $v(x) \in E$.

c) Ainsi, l'application $v \mapsto v(x)$ est injectif de Δ dans E . Donc $\dim \Delta \leq \dim E = n$.

Or, on a par ailleurs $F \subset \Delta$, donc par dimension, $F = \Delta$.

12) a) $1 - Q$ est un polynôme de Lagrange. On a donc $Q(X) = 1 - \prod_{j=1}^p \frac{(X - \lambda_j)}{(0 - \lambda_j)} = 1 - \prod_{j=1}^p \left(\frac{X}{\lambda_j} - 1 \right)$.

Variante : On définit Q comme la somme de p polynômes de Lagrange.

b) A est trigonalisable et semblable à une matrice triangulaire T de coefficients diagonaux appartenant à $\{0, \lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

On a alors $Q(A)$ semblable à $Q(T)$ et les coefficients diagonaux sont les images de ceux de T par Q . On en déduit que $\text{tr } Q(A) = \text{tr } Q(T) = m$, où m est le nombre de zéros sur la diagonale de $Q(T)$, c'est-à-dire le nombre de racines non nulles de χ_T , donc de χ_A .

Or, $m = 0$ ssi 0 est la seule valeur propre de A , donc ssi A est diagonalisable.

c) Montrons (i) $\implies$ (ii) : Si A est nilpotente, A^k est nilpotente pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc 0 est la seule valeur propre de A^k . Donc a fortiori, $\text{tr}(A^k) = 0$.

Montrons (ii) $\implies$ (i) : Supposons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

Avec les notations de a), on a $\text{tr } Q(A) = 0$, car $Q(0) = 0$, donc $Q(A) \in \text{Vect}(A, A^2, \dots, A^p)$.

Par b), A est nilpotente.