

Interrogation n°9. Barème sur 24 pts

1) [1.5 pt] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P(X) = \prod_{j=1}^r (X - \mu_j)^{m_j} \in \mathbb{C}[X]$, avec $m_j \in \mathbb{N}^*$.

On note $\Delta = \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ l'ensemble des racines de P .

Montrer que la matrice $P(A)$ est inversible ssi $\text{Sp}(A) \cap \Delta = \emptyset$,

c'est-à-dire ssi aucune racine μ_j de $P(X)$ n'est valeur propre de A .

2) [2 pts] Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

3) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer (en une ligne) que A est nilpotente ssi $\text{tr } A = \det A = 0$.

4) [1.5 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que A et $2A$ sont semblables.

En utilisant le spectre de A , montrer que A est nilpotente.

5) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose qu'il existe deux nombres complexes distincts λ et μ tels que $(u - \lambda \text{Id}) \circ (u - \mu \text{Id}) = 0$.

a) [0.5 pt] On pose $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$. Montrer que $E_\lambda \oplus E_\mu = E$.

b) [1 pt] On note p_λ la projection sur E_λ parallèlement à E_μ .

Exprimer sans justification p_λ comme polynôme en u .

c) [0.5 pt] Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer sans justification $u^k(x)$ en fonction de $k, \lambda, \mu, p_\lambda(x), p_\mu(x)$.

6) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_n & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

On utilisera les polynômes annulateurs.

a) [1 pt] On suppose M diagonalisable. Montrer que A et B sont diagonalisables.

b) [1.5 pt] On suppose que A et B sont diagonalisables, π_A et π_B des polynômes annulateurs de A et B .

On suppose de plus que A et B n'ont pas de racine commune, c'est-à-dire $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

Montrer que le produit matriciel $\pi_A(M) \pi_B(M)$ vaut O_{2n} . En déduire que M est diagonalisable.

c) [0.5 pt] Donner un exemple où A et B sont diagonalisables et où M n'est pas diagonalisable.

7) [2 pts] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, avec $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} = E$ et $\dim E = n$.

a) Soit F un sev de E stable par u . Montrer que $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, où $F_j = F \cap E_{\lambda_j}$.

Indication : Utiliser les propriétés de $u|_F$.

b) On suppose que $p = n$, et ainsi les sev propres E_{λ_j} sont des droites vectorielles.

Déterminer le nombre de sev de E stables par u .

8) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un K -espace vectoriel de dimension finie n .

On note Δ l'ensemble des polynômes $P(X) \in K[X]$ non nuls et annulateurs de u .

a) [0.5 pt] Montrer brièvement qu'il existe $d = \min\{\deg P \mid P \in \Delta\}$ et que $d \leq n$.

On considère désormais un polynôme $M(X) \in \Delta$ de degré minimum d .

b) [1 pt] Soit $P(X) \in K[X]$. En utilisant la division euclidienne, montrer $P(u) = 0$ ssi $M(X)$ divise $P(X)$.

De ce fait, il existe un unique polynôme annulateur $M(X)$ unitaire et de degré d , appelé polynôme minimal de u .

c) [1 pt] On suppose que u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Déterminer $M(X)$.

9) [2 pts] Soit p une projection sur F parallèlement à G , où $E = F \oplus G$ est un K -ev de dimension n .

On pose $\Delta = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid p \circ u = u \circ p\}$. Exprimer $\dim \Delta$ en fonction de n et de $r = \text{tr } p$.

10) Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et des matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = (B + I_n)A$.

a) [0.5 pt] Montrer que B et $B + I_n$ ne sont pas semblables.

b) [0.5 pt] Montrer que le sev $\text{Ker } A$ est non nul et stable par B .

c) [1.5 pt] On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B .

On considère une base $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{C}^n$ adaptée à $\text{Ker } a \oplus S = E$.

En considérant les matrices de a et b dans $\mathcal{B}$, montrer par récurrence que A est nilpotente.

d) *Question supplémentaire* : Montrer aussi que A et B sont cotrigonalisables.

11) [2 pts] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

a) On pose $F = \text{Vect}(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{n-1})$. Montrer que $\dim F = n$.

b) On considère le sev $\Delta = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$, appelé commutant de u .

Soit $v \in \Delta$, c'est-à-dire $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u .

En considérant les $v(u^k(x))$, montrer que v est entièrement défini par le vecteur $v(x) \in E$.

c) En déduire que $F = \Delta$.

12) [2 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes **non nulles** de A .

a) Expliciter un polynôme $Q(X)$ de degré $\leq p$ tel que $Q(0) = 0$ et $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\lambda_j) = 1$.

b) Montrer que A est nilpotente ssi $\text{tr } Q(A) = 0$.

c) En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est nilpotente

(ii) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{tr}(A^k) = 0$.