

Interrogation n°8. Corrigé

1) a) Oui : Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^5$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^5$ associé à A .
Alors A est la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) et B est la matrice de u dans la base (e_1, e_3, e_2) .

b) Non, car A et C n'ont pas même trace.

2) On a $\dim E_0 = \dim \text{Ker } u = n - r \leq m_0$ ordre de 0 comme racine de χ_u .

Donc x^{n-r} divise $\chi_u(x)$.

Variante : On considère la matrice de u dans une base adaptée à $\text{Ker } u \oplus S = E$.

3) a) On considère $\forall x \in \mathbb{R}, \chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.

Pour $x \neq 0$, on retranche à la dernière colonne la somme des sommes divisée par x .

On obtient une matrice triangulaire inférieure, d'où $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - mx^{-1}) = x^{n-2}(x^2 - m)$.

Deux polynômes coïncidant sur $\mathbb{R}^*$ sont égaux, d'où $\chi_A(x) = x^{n-2}(x^2 - m)$.

b) $\sqrt{m}$ et $\sqrt{-m}$ sont racines simples de χ_A , donc valeurs propres et les sev propres sont de dim 1.

D'autre part, $\dim E_0 = \dim \text{Ker } A = n - 2$, car $\text{rg } A = 2$.

D'où par dimension, $E_0 \oplus E_{\sqrt{m}} \oplus E_{-\sqrt{m}} = E = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire A diagonalisable.

4) a) La matrice M est la matrice (de $\mathcal{M}_{n+1}(K)$) dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la première surdiagonale qui valent respectivement $1, 2, 3, \dots, n$.

b) On a, pour $j \geq 2$, $u(\lambda_j X_j) = j\lambda_j X_j$. Posons $P_j = \lambda_j X_j$. On a donc $\forall j \geq 2, u(P_j) = \frac{j}{\lambda_{j-1}} P_{j-1}$.

On veut $u(P_0) = 0$ et $u(P_j) = P_{j-1}$ pour tout $2 \leq j \leq n$, donc on veut $\forall j \geq 2, \lambda_j = \frac{1}{j}\lambda_{j-1}$.

On peut prendre $\lambda_j = \frac{1}{j!}$. On considère donc la base de Taylor $\mathcal{B}' = \left(1, X, \frac{1}{2}X^2, \dots, \frac{1}{n!}X^n\right)$.

5) a) Les valeurs propres de A sont 1 et 2.

On a : $AX = X$ ssi $y = 0$ donc $E_1 = K(1, 0)$. On a $AX = 2X$ ssi $x + y = 2x$, donc $E_1 = K(1, 1)$.

On peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $P^{-1}AP$ est diagonale ssi (P_1, P_2) est une base de vecteurs propres de A .

Donc les solutions P sont les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, avec α et β non nuls.

6) a) On a $(xI_n - A)^T = xI_n - A^T$, donc $(xI_n - A)$ et $(xI_n - A^T)$ ont même déterminant.

b) Si $P^{-1}AP = B$, alors $Q^{-1}A^TQ = B^T$, avec $Q = (P^{-1})^T$.

c) Si A est diagonalisable, il résulte de b) que A et A^T sont semblables (avec $B = \text{Diag}(\lambda, \mu) = B^T$).

Sinon, $A \sim B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Il suffit par b) de prouver que B et B^T sont semblables.

Or, on a $B^T = P^{-1}BP$, où $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui correspond au changement de bases $(e_1, e_2) \rightarrow (e_2, e_1)$.

7) a) N est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T .

Comme $N^p = O_n$, alors $T_p = O_n$, donc T est triangulaire supérieure stricte.

b) On a $\text{Im } a \subset \text{Ker } n$. On se place dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\text{Ker } n \oplus S = E$. On pose $r = \dim S$.

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} n = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & M \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & O \end{array} \right)$. D'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a + n) = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & M \end{array} \right)$.

On a donc $\chi_{A+N}(x) = \chi_B(x)\chi_M(x)$. Comme $N^p = O$, alors $M^p = O$, donc $\chi_M(x) = x^r$.

Donc $\chi_{A+N}(x) = \chi_B(x)x^r = \chi_A(x)$.

7) a) N est trigonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T .

Comme $N^p = O_n$, alors $T_p = O_n$, donc T est triangulaire supérieure stricte.

b) On a $\text{Im } a \subset \text{Ker } n$. On se place dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\text{Ker } n \oplus S = E$. On pose $r = \dim S$.

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} n = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & M \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & O \end{array} \right)$. D'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a + n) = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & M \end{array} \right)$.

On a donc $\chi_{A+N}(x) = \chi_B(x)\chi_M(x)$. Comme $N^p = O$, alors $M^p = O$, donc $\chi_M(x) = x^r$.

Donc $\chi_{A+N}(x) = \chi_B(x)x^r = \chi_A(x)$.

c) On a $NA = O$, donc $A^T N^T = O$. Comme N est nilpotente, alors N^T est nilpotente.

Donc $(A + N)^T$ a même polynôme caractéristique que A^T . On conclut avec le a) de l'exo précédent.

8) Si $p < n$, alors $AB \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq p$, donc $\det(AB) = 0$. De même si $p > n$ avec BA .

9) On a $A - \lambda B = B(B^{-1}A - \lambda I_n)$, donc $\det(A - \lambda B) = \det(B) \det(B^{-1}A - \lambda I_n)$.

Il suffit donc de choisir $\lambda \in \text{Sp}(B^{-1}A)$, qui existe car $B^{-1}A$ matrice sur $\mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

10) a) $\{\deg P \mid P \in F\}$ est un ensemble d'entiers non vide (car F non nul), donc k existe.

Par définition de k , $F \subset \mathbb{C}_k[X]$.

Il existe donc $P \in F$ tel que $\deg P = k$. On a alors $u^j(P) = P^{(j)} \in F$ pour tout $0 \leq j \leq k$.

D'où $F \supset \text{Vect}(P, P', \dots, P^{(k)}) = \mathbb{C}_k[X]$, car $P, P', \dots, P^{(k)}$ sont de degrés échelonnés.

b) Les sev de F stables par u sont donc $\{0\}$ et les $\mathbb{C}_k[X]$, avec $0 \leq k \leq n$.

11) a) On peut développer selon la j -ième colonne.

Une variante consiste à retrancher à la j -ième une combinaison linéaire bien choisie des autres.

On obtient $\beta_j = \det(E_1, \dots, E_{j-1}, a_{jj}E_j, E_{j+1}, \dots, E_n) = a_{jj} \det(I_n) = a_{jj}$.

b) Supposons qu'il existe $i < j$ tels que $X_i = X_j$.

Alors $f(X_1, \dots, X_n) = \det(X_1, \dots, AX_i, \dots, X_j, \dots, X_n) + \det(X_1, \dots, X_i, \dots, AX_j, \dots, X_n) + 0$.

Comme $\det$ est antisymétrique et que $X_i = X_j$, alors $f(X_1, \dots, X_n) = 0$. Donc f est alternée.

c) Par le cours, il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \det$.

En évaluant en $(E_1, \dots, E_n)$ et en utilisant a), on obtient $\lambda = \sum_{j=1}^n \beta_j = \text{tr } A$.

12) a) On considère une base de E composée de vecteurs propres.

On peut compléter une base de F en lui ajoutant des vecteurs propres de u .

On obtient ainsi un supplémentaire de F stable par u .

b) On considère un hyperplan de E . Il admet donc un supplémentaire stable, qui est une droite Ke_1 .

Donc e_1 est un vecteur propre ; une fois construits une famille libre $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteur propres, avec $k < n$,

on considère un hyperplan contenant $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et qui admet donc un supplémentaire Ke_{k+1} stable par u , et

ainsi $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ est une famille libre de vecteurs propres.

Finalement, on obtient bien une base de vecteurs propres, donc u est diagonalisable.